Fachbereich Mathematik — Blatt 5

S. König/ L. Margolis — WS 2013/14

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Ἀγεωμέτρητος μηδεις εἰσίτω.[1]

Aufgabe 1: Beschreiben Sie bis auf Isomorphie alle Inzidenzebenen mit genau vier Punkten. Welche erfüllen Playfairs Axiom?

Aufgabe 2 (Schriftlich): Es sei K ein Körper. Es sei K^2 die Menge der Punkte und es seien die Geraden die Lösungsmengen linearer Gleichungen der Form $ax + by + c = 0$ mit $a, b, c \in K$ und a und b nicht beide 0 (analog zur kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$). Dies nennt man die k**artesische Ebene** über K. Zeigen Sie, dass eine kartesische Ebene die Inzidenzaxiome (I1) - (I3) und Playfairs Axiom (P) erfüllt.

Aufgabe 3: Es sei M eine Menge, deren Elemente Punkte heißen, und G eine Teilmenge der Potenzmenge von M, deren Elemente Geraden heißen. Dann nennt man (M, G) eine **projektive Ebene**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(P1): Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die beide Punkte enthält.

(P2): Zwei Geraden schneiden sich in mindestens einem Punkt.

(P3): Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte.

(P4): Es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Zeigen Sie:

a) Jede projektive Ebene ist eine Inzidenzebene.

[1] „Niemand, der der Geometrie unkundig ist, trete ein. “
Laut einer Legende die Inschrift am Eingang zu Platons Akademie.

b) Jede projektive Ebene enthält wenigstens sieben Punkte und es existiert eine projektive Ebene mit sieben Punkten.

c) Die projektive Ebene mit sieben Punkten liegt als Inzidenzebene bis auf Isomorphie fest.

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Axiome (P1) - (P4) einer projektiven Ebene unabhängig sind.

Hinweis: Die Scheinklausur findet am 08. Januar 2014 um 14 Uhr im Vorlesungssaal V38.01 im Informatikgebäude statt. Die genaue Adresse ist Universitätsstraße 38, **nicht** Pfaffenwaldring 38!