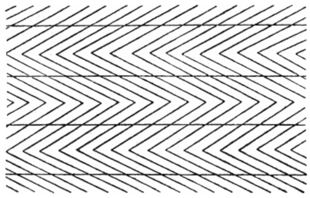
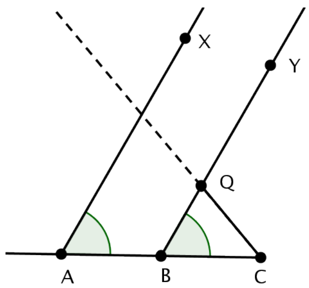
Schulmathematik vom höheren Standpunkt

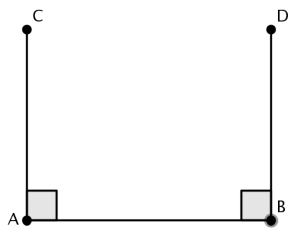


Hinweis: Das Parallelenaxiom oder äquivalente Formulierungen dürfen Sie auf diesem Blatt nicht voraussetzen. Verwenden dürfen Sie aber etwa: Kongruenzsätze; die Anordnung von Winkeln; die Aussage, dass der Außenwinkel eines Dreieckwinkels größer ist als der gegenüberligende Winkel; die Aussage, dass die im Inneren eines Dreieckswinkels liegende Gerade die gegenüberliegende Seite schneidet und ähnliche Aussagen.



Aufgabe 1 (Schriftlich): Zeigen Sie, dass aus „Wallis Axiom“ Euklids Axiom I.5 folgt.
Hinweis: Sie können etwa wie folgt vorgehen. Zeigen Sie: Zwei Winkel in einem Dreieck legen den dritten Winkel fest. Ist ABC eine Gerade und die Winkel XAC und YBC gleich, so schneidet eine Gerade CQ, welche YB schneidet, auch XA. Die Geraden AX und BY schneiden sich nicht. Und schließlich Euklids Axiom I.5.

Aufgabe 2: Es seien A, B, C, D vier Punkte derart, dass die Strecken AC und BD kongruent sind und die Winkel CAB und ABD jeweils recht. Dann nennen wir das Viereck $ABCD$ ein **Saccheri-Viereck**. Zeigen Sie ohne das Parallelenaxiom oder eine äquivalente Aussage zu nutzen:



a) Es sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck. Die Winkel ACD und CDB sind gleich groß. Die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte von AB und CD steht auf beiden Strecken senkrecht.

b) Es sei AB eine Strecke und AC und BD seien Strecken, welche jeweils senkrecht auf AB stehen. Dann ist der Winkel ACD größer als der Winkel CDB genau dann, wenn die Strecke AC kürzer als die Strtecke BD ist.

c) Nun sei wieder $ABCD$ ein Saccheri-Viereck, es sei P ein Punkt auf CD und es sei Q ein Punkt auf AB, so dass PQ senkrecht steht auf AB. Der Winkel ACD heiße α. Zeigen Sie: Es ist PQ kürzer als AC genau dann, wenn α spitz ist; PQ kongruent zu AC genau dann, wenn α recht ist und PQ länger als AC genau dann, wenn α stumpf ist.

Aufgabe 3: (Kirkmans Schulmädchenproblem, 1850) An einer Mädchenschule mit 15 Schülerinnen gehen in der großen Pause die Mädchen jeweils in Dreiergruppen spazieren. Es soll ein Wochenplan erstellt werden (Wochenenden inbegriffen), so dass jedes Mädchen innerhalb einer Woche mit jeder Mitschülerin genau ein Mal spazieren geht.

a) Formulieren Sie das Problem geometrisch. Geben Sie ein Axiomensystem einer Geometrie an, welches obige Fragestellung für eine beliebige Schüleranzahl, Gruppengröße und Wochenlänge verallgemeinert. Sie können etwa mit „Ein Mädchen enspricht einem Punkt“ beginnen.

b) Lösen Sie Kirkmans Schulmädchenproblem. Ist die Lösung eindeutig?

Hinweis: Diese Aufgabe dient dem Experimentieren mit Axiomen, probieren Sie also ruhig etwas aus und haben Sie keine Angst etwas „falsch“ zu machen. Schließlich hat es auch viele Jahrhunderte und eine Menge kluger Köpfe gebraucht bis man die Axiomatik Euklids präzisieren konnte.