Fachbereich Mathematik | Blatt 2
S. König/ L. Margolis | WS 2013/14

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Aufgabe 1: Diskutieren Sie, ob die übliche tiefgründige Behandlung des Dreiecks in der Schule heute noch gerechtfertigt ist. Als Anstoß könnte Ihnen folgendes Zitat dienen:
Die Axiomatik von Euklid-Hilbert ist auf die Begriffe der Länge, des Winkels und des Dreiecks gegründet. Sie verhüllt geradezu wundervoll die Vektor-Struktur des Raumes. [...] Unser Streben muß zu Methoden führen, die auf den Grundbegriffen fußen, die zwanzig Jahrhunderte endlich herausgelöst haben: Der Begriff der Menge, Ordnungs- und Äquivalenzbeziehungen, das algebraische Gesetz, der Vektorraum, die Symmetrie, die Transformation.
G. Choquet, Neue Elementargeometrie, Vieweg 1970.

Aufgabe 2: (Schriftlich) Es sei A ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V.

a) Sind $P_1, P_2, ..., P_k, P_{k+1}$ Punkte in A, welche nicht in einem $(k-1)$-dimensionalem affinen Unterraum von A liegen, so gibt es genau einen k-dimensionalen affinen Unterraum von A, welcher $P_1, ..., P_{k+1}$ enthält.

b) Zwei affine Unterräume B_1 und B_2 mit zugehörigen Untervektorräumen U_1 bzw. U_2 heißen **parallel**, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt. Zeigen Sie, dass zu jedem affinen Unterraum L der Dimension k von A und jedem Punkt $P \in A$ genau ein affiner Unterraum der Dimension k in A existiert, welcher P enthält und parallel zu L ist.

Zur Erinnerung: Es seien A und B affine Räume über einem Körper K mit zugehörigen K-Vektorräumen V bzw. W. Dann nennt man eine Abbildung $\alpha : A \to B$ eine **affine Abbildung**, wenn die induzierte Abbildung $\varphi_\alpha : V \to W,\ \overrightarrow{PQ} \mapsto \overrightarrow{\alpha(P)\alpha(Q)}$ existiert und linear ist.

Aufgabe 3: Es sei A ein affiner Raum mit zugehörigem Vektorraum V.

a) Es sei $\psi : A \to A$ eine Translation oder eine zentrische Streckung. Zeigen Sie, dass ψ affin ist. Welche linearen Abbildungen werden auf V induziert?

b) Es sei $V \cong \mathbb{R}^3$. Geben Sie eine affine Abbildung $\psi : A \to A$ an, welche die Spiegelung an einer fest vorgegebenen Geraden $g \in A$ beschreibt. Geben Sie ebenso eine affine Abbildung an, welche eine Schraubung um g mit Winkel α beschreibt.

c) Es sei $V \cong \mathbb{R}^2$ und $\psi : A \to A$ eine bijektive affine Abbildung, welche eine Fixpunktgerade besitzt. Zeigen Sie, dass alle Geraden in A, welche einen Punkt, der kein Fixpunkt ist, mit seinem Bildpunkt verbinden, parallel sind.

Bemerkung: Falls Ihnen die Begriffe zentrische Streckung oder Schraubung nicht vertraut sind, können Sie diese etwa bei Wikipedia nachschlagen.

Aufgabe 4: Es bezeichne $\mathbb{R}[X]$ den Raum aller reellen Polynome. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ jeweils Skalarprodukte auf $\mathbb{R}[X]$ definieren.

- $s_1(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)e^{-n}$
- $s_2(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$
- $s_3(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$
- $s_4(f,g) = \int_0^1 (f(x)^2 + g(x)^2)dx$

Was ändert sich, wenn man $\mathbb{R}[X]$ durch den Vektorraum aller stetigen, beschränkten Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ersetzt?

Hinweis: Sie finden die Aufgabenblätter, Literaturhinweise und demnächst auch ein Glossar ebenso auf der Webseite der Veranstaltung:

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/Schulmath-Koenig/

Diese ist auch auf den Seiten von Herrn König und Herrn Margolis verlinkt.