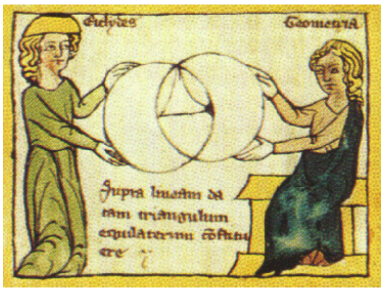
Fachbereich Mathematik
S. König/L. Margolis

Blatt 11
WS 2013/14

Schulmathematik vom höheren Standpunkt



Aufgabe 1: Es sei K ein angeordneter Körper und K^2 die kartesische Ebene über K. Zeigen Sie: In K^2 existiert genau dann ein gleichseitiges Dreieck, wenn $\sqrt{3} \in K$ gilt.

Aufgabe 2: Eine algebraische Zahl heißt **total reell**, wenn alle ihre Konjugierten reell sind. Ein Körper, der aus lauter total reellen Elementen besteht, heißt **total reell.** Eine total reelle Zahl heißt **total positiv**, wenn alle ihre Konjugierten positiv sind. Es sei K ein total reeller Körper und $a \in K$ total positiv. Zeigen Sie:

a) Es ist $K(\sqrt{a})$ ein total reeller Körper. Für jedes $c \in K$ ist $1 + c^2$ total positiv.

b) Der Hilbert-Körper ist total reell.

c) Die Zahl $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar, aber nicht total reell. Somit ist der Hilbert-Körper ein echter Teilkörper der konstruierbaren Zahlen.

Aufgabe 3 (Schriftlich): Es sei H eine Geometrie, in der die Inzidenzaxiome (I1) - (I3) und die Anordnungsaxiome (Z1) - (Z4) gelten und die Begriffe Kongruenz von Strecken und Kongruenz von Winkeln erklärt sind (nicht unbedingt mittels (K1) - (K6)). Zeigen Sie:

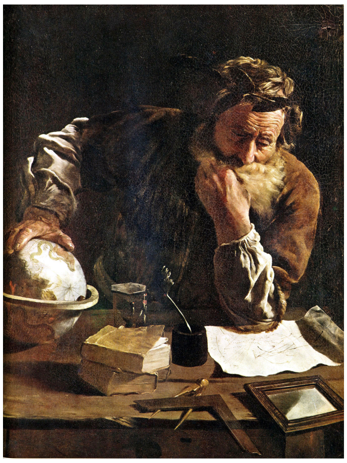
a) Die Menge der Kongruenzabbildungen von H bildet bezüglich der Komposition eine Gruppe.

b) Gelten (K2) und (K5) sowie die Eindeutigkeitsaussagen von (K1) und (K4), so folgt (K6) aus (ERM).
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Komposition gewisser Kongruenzabbildungen das eine Dreieck in das andere überführt.

c) Ist H eine Hilbertebene, so folgt (ERM).
Hinweis: Konstruieren Sie zuerst die Spiegelung.

d) Gelten in H die Axiome (K1) - (K5), so sind (K6) und (ERM) äquivalent.

Aufgabe 4: Es sei K ein pythagoreischer angeordneter Körper und K^2 die zugehörige kartesische Ebene. Zeigen Sie, dass (ERM) in K^2 gilt. Folgern Sie, dass (K6) in K^2 gilt.


Domenico Fetti, Archimedes

Aufgabe 5: Es sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie, dass aus Dedekinds Axiom (D') das Archimedische Axiom (A') folgt.