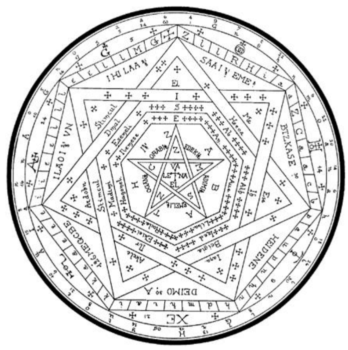
Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Aufgabe 1: Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und A ein affiner Raum über V. Es sei $\mathcal{G}$ die Menge der Geraden in A. Es sei R eine Relation auf $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, so dass $(g, h) \in R \Leftrightarrow g$ und h sind windschief. Untersuchen Sie R auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität.

Aufgabe 2 (Schriftlich): Zeigen Sie ohne die Galois-Theorie zu verwenden, dass das regelmäßige 7-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.
Hinweis: Finden Sie eine Polynom, welches von $\cos(2\pi/7)$ erfüllt wird. Sie können z.B. zeigen: $(2\cos(2\pi/7))^3 + (2\cos(2\pi/7))^2 - 4\cos(2\pi/7) - 1 = 0$.



Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass in $\mathbb{R}$ transzendente Zahlen existieren. Zeigen Sie hierfür, dass die Menge der algebraischen Zahlen in $\mathbb{R}$ abzählbar ist.
Zusatz: Können Sie von irgendeiner Zahl nachweisen, dass diese transzendent ist?

Aufgabe 4: Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes von Pappus (Proposition 5.6) aus der Vorlesung.
Geben Sie einen Schiefkörper an und zeigen Sie, dass über diesem der Satz von Pappus nicht gilt.

Aufgabe 5: (Nach „Papierfalten im Mathematikunterricht“, Klett) Gegeben sei ein DIN-A4-Blatt. Man falte an einer der Ecken einen beliebigen Winkel. Anschließend falte man die Mittelsenkrechte der längeren Seite und bezeichne die Punkte wie in untenstehendem Bild. Man falte nun die Mittelparallele EF von AB und CD (s. Bild). Man falte nun die Ecke A so, dass A auf EF und C auf AP liegt, markiere den Punkt, auf dem nun A liegt, und nenne ihn A'.

Erläutern Sie, wie die einzelnen Faltoperationen durchzuführen sind, und weisen Sie nach, dass dann der Winkel $A'AB$ einem Drittel des Winkels PAB entspricht. Welche der mittels Faltoperationen konstruierten Punkte und Geraden könnte man auch mit Zirkel und Lineal erhalten?

Nach jeder Faltanleitung sollte eigentlich noch „entfalten Sie wieder“ stehen.