Zahlentheorie: Übungsblatt 9
(für die Übungen am 20./21. Dezember 2012)

Aufgabe 1 (schriftlich)**.** Definiere eine arithmetische Funktion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ durch $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

(a) Berechnen Sie $\sigma(5), \sigma(6)$ und $\sigma(7)$.

(b) Sei $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ die Primfaktorzerlegung von n. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{a_i} p_i^j = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

(c) Zeigen Sie, dass σ eine multiplikative arithmetische Funktion ist.

Aufgabe 2 (mündlich)**.** Sei σ wie in der vorigen Aufgabe definiert. Eine Zahl heißt perfekt, wenn $\sigma(n) = 2n$.

(a) Die Zahl n habe die Eigenschaft, dass Primzahlen p und q existieren mit $q = 2^p - 1$ und $n = 2^{p-1}q$. Zeigen Sie, dass n eine perfekte Zahl ist.

(b) Im nachfolgenden Teil wollen wir die Umkehrung für gerade Zahlen zeigen. Sei also für den Rest dieser Aufgabe n eine gerade perfekte Zahl mit $n = 2^{k-1}m$ für $(m, 2) = 1$. Zeigen Sie, dass $2^k - 1$ die Zahl m teilt.

(c) Sei $l = m/(2^k - 1)$. Zeigen Sie: Wenn $l > 1$ gilt, dann ist $\sigma(2^k - 1) \geq 1 + l + (2^k - 1)l$. Folgern Sie, dass $l = 1$ gelten muss.

(d) Beweisen Sie, dass $2^k - 1$ eine Primzahl ist.

(e) Zeigen Sie, dass die Bedingung aus Teil (a) für gerade Zahlen auch notwendig ist.

Aufgabe 3 (schriftlich)**.** (a) Zeigen Sie, dass $d(n)$ genau dann eine Primzahl ist, wenn n von der Form p^{q-1} für zwei Primzahlen p und q ist.

(b) Beweisen Sie, dass $\prod_{d|n} d = n^{d(n)/2}$.

(c) Sei $\delta > 0$ und $x \geq e^e$. Zeigen Sie: Die Anzahl der natürlichen Zahlen $n \leq x$ mit $d(n) \geq (\ln x)^{1+\delta}$ ist $O(x(\ln x)^{-\delta})$.

Aufgabe 4 (mündlich)**.** (a) Sei φ die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie, dass für jedes $\delta > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{1-\delta}} = \infty.$$

[Hinweis: Betrachten Sie den Kehrwert der Funktion und verwenden Sie die Ungleichung $0 < \frac{p^{k(1-\delta)}}{p^k(1-p^{-1})} \leq \frac{2}{p^{k\delta}}$.]

(b) Beweisen Sie, dass $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\varphi(n)\sigma(n)}{n^2} < 1$. [Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{\varphi(p^k)\sigma(p^k)}{p^{2k}} = 1 - \frac{1}{p^{k+1}} \geq 1 - p^{-2}$ für jede Primzahlpotenz p^k gilt.]

Aufgabe 5 (mündlich)**.** Zeigen Sie:

(a) Für $\alpha \in (0,1)$ gilt: $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha}\ln x}{1-\alpha} + O(x^{1-\alpha})$.

(b) Sei d_l wie in der Vorlesung definiert und $l > 1$. Dann gilt: $\displaystyle\sum_{n\leq x} \frac{d_{l+1}(n)}{n} = \sum_{d\leq x} \frac{1}{d} \sum_{n\leq x/d} \frac{d_l(n)}{n}$.

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/