

Zahlentheorie: Übungsblatt 8 (für die Übungen am 13./14. Dezember 2012)

Aufgabe 1 (schriftlich). Die von Mangoldt Funktion $\Lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine arithmetische Funktion definiert durch

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & n = p^k \text{ ist Primzahlpotenz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (a) Ist Λ multiplikativ oder additiv (d.h. ist $\Lambda(m+n) = \Lambda(m) + \Lambda(n)$ für teilerfremde $m, n \in \mathbb{N}$)?
- (b) Sei $1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $1(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\Lambda * 1 = L$, wobei $L : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ wie in der Vorlesung definiert ist durch $L(n) = \ln n$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\Lambda(n) = - \sum_{d|n} \mu(d) \ln d$.

Aufgabe 2 (mündlich). Eine Partition einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist eine Zerlegung von n in Summanden der Form

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k,$$

wobei $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$. Zum Beispiel sind die Partitionen von 4 gegeben durch

$$4, \quad 3 + 1, \quad 2 + 2, \quad 2 + 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 + 1.$$

Die arithmetische Funktion $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ordnet jeder Zahl n die Anzahl der Partitionen von n zu, z.B. ist $p(4) = 5$. Wir definieren $p(0) = 1$.

- (a) Finden Sie alle Partitionen von 5 und 6.
- (b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Partitionen von n , bei denen v als Summand auftaucht, genau $p(n-v)$ ist. Finden Sie einen ähnlichen Ausdruck für die Anzahl der Partitionen, bei denen v mindestens k -mal bzw. genau k -mal als Summand auftaucht.
- (c) Zeigen Sie, dass

$$np(n) = \sum_{\substack{kv \leq n \\ k, v \geq 1}} vp(n - kv)$$

und berechnen Sie so $p(7)$ und $p(8)$. [Hinweis: Betrachten Sie die Anzahl aller Partitionen von n , bei denen v genau k -mal als Summand auftaucht.]

Aufgabe 3 (mündlich). (a) Seien f, f_1, f_2, g reellwertige Funktionen. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Landau-Symbole O und o :

- (i) Aus $f(x) = o(g(x))$ folgt $f(x) = O(g(x))$.
- (ii) Aus $f_1(x) = O(g(x))$ und $f_2(x) = O(g(x))$ folgt $(f_1 + f_2)(x) = O(g(x))$.
- (iii) Aus $f_1(x) = O(g_1(x))$ und $f_2(x) = O(g_2(x))$ folgt $(f_1 f_2)(x) = O((g_1 g_2)(x))$.

(b) Zeigen Sie:

- (i) $3n^2 + n \ln n + 7 = O(n^2)$.
- (ii) $n! = O(n(n/e)^n)$.

Aufgabe 4 (schriftlich). (a) Seien $a < b$ ganze Zahlen und f eine stetige Funktion, die monoton steigend ist auf dem Intervall $[a, b]$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$f(a) \leq \sum_{n=a}^b f(n) - \int_a^b f(t) dt \leq f(b).$$

(b) Beweisen Sie, dass

$$\sum_{n \leq x} \ln n = x \ln x - x + O(\ln(x)).$$

Aufgabe 5 (mündlich). Sei S eine Menge von s Steinen verschiedener Farben. Eine (Schmuck-)Kette K der Länge n besteht aus einer Aneinanderreihung von n Steinen aus S , wobei Wiederholungen möglich sind. Wir betrachten Ketten als Steine, die auf dem Einheitskreis gleichmäßig verteilt wurden, so dass zwei Ketten identisch sind, wenn an jeder Stelle der Kette der gleiche Steintyp vorkommt.

Zwei Ketten heißen äquivalent, wenn sie durch Rotation in der Ebene ineinander überführt werden können. Eine Kette heißt aperiodisch, wenn man sie nur durch die triviale Rotation in sich selbst überführen kann.

Wir bezeichnen mit $A(s, n)$ die Anzahl der aperiodischen, nicht äquivalenten Ketten der Länge n mit höchstens s vielen verschiedenen Steinen. Zeigen Sie:

- (a) $s^n = \sum_{d|n} d A(s, d)$. [Hinweis: Finden Sie eine Notation der Form $bgbg$ für eine Kette mit Steintypen blau gelb blau gelb.]
- (b) Berechnen Sie $A(s, d)$ für $d = p^k$ eine Primzahlpotenz.
- (c) Wie kann man aus Teil (b) Fermats kleinen Satz herleiten?

<http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/>