Zahlentheorie: Übungsblatt 7
(für die Übungen am 6./7. Dezember 2012)

Aufgabe 1 (schriftlich)**.** Seien δ und L wie in der Vorlesung definiert. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von arithmetischen Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$:

(a) Wenn $f * g = 0$, dann ist entweder $f = 0$ oder $g = 0$.

(b) f heißt Einheit, wenn es eine arithmetische Funktion $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $f * f^{-1} = \delta$. f ist genau dann eine Einheit, wenn $f(1) \neq 0$ ist.

(c) $L^n(f * g) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} L^{n-k} f * L^k g.$

Aufgabe 2 (schriftlich)**.** Sei μ die Möbiusfunktion.

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine arithmetische Funktion und sei $g(n) = \displaystyle\sum_{d|n} f(d)$. Schreiben Sie $f(30)$ als Summe und Differenz von Werten der Funktion g.

(b) Sei $d(k)$ die Anzahl der Teiler von k. Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{k|n} d(k)\mu(\frac{n}{k}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (mündlich)**.** (a) Zeigen Sie, dass sich keine ganze Zahl der Form $4^n(8m + 7)$ (mit $m, n \in \mathbb{N}_0$) als Summe dreier Quadrate darstellen lässt. Im folgenden Teil dürfen Sie annehmen, dass auch die Umkehrung gilt.

(b) Beweisen Sie, dass die Gleichung $a^2 + b^2 + 2c^2 = n$ in den Unbekannten a, b und c für jede positive ganze Zahl n eine ganzzahlige Lösung besitzt.

Aufgabe 4 (mündlich)**.** Die Folge der Bernoulli-Zahlen $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch

$$1^k + 2^k + \ldots (m-1)^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j m^{k+1-j}.$$

Z.B. erhält man B_0, indem man $k = 0$ und $n = 1$ setzt. Wir definieren die Folge der Bernoulli-Polynome $\{B_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Folge der Bernoulli-Polynome ist wohldefiniert.

(b) Eine Folge von Polynomen $\{A_n(x)\}$ ist genau dann die Folge der Bernoulli-Polynome, wenn gilt:

$$A_0(x) = 1,$$
$$A'_n(x) = nA_{n-1}(x) \text{ für } n \geq 1,$$
$$\int_0^1 A_n(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ für } n \geq 1.$$

(c) $B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} B_k$.

Aufgabe 5 (mündlich)**.** Sei $a_0 + \frac{1}{a_1+}\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n}$ ein Kettenbruch mit $a_i \in \mathbb{N}$ und setze $A_n = [a_0, \ldots, a_n]$ (in der Notation von Blatt 2) und $B_n = [a_1, \ldots, a_n]$.

(a) Zeigen Sie, dass $A_nB_{n-1} - B_nA_{n-1} = (-1)^{n-1}$.

(b) Folgern Sie, dass A_m und B_m teilerfremd sind.

(c) Benutzen Sie die ersten beiden Teile, um die Gleichung $61x-48y = 1$ (ohne Verwendung von Euklids Algorithmus) zu lösen.

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/