

Zahlentheorie: Übungsblatt 4 (für die Übungen am 15./16. November 2012)

Aufgabe 1 (schriftlich). Lösen Sie die polynomiale Kongruenz

$$x^2 + 2x + 2 \equiv 0 \pmod{125}.$$

Aufgabe 2 (mündlich). Zeigen Sie, dass die Kongruenz

$$x^{p-2} + \dots + x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

genau $p - 2$ Lösungen hat und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3 (mündlich). Sei p eine ungerade Primzahl und r eine Primitivwurzel modulo p . Zeigen Sie:

- (a) Es gilt die Kongruenz $r^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p}$.
- (b) Ist n eine ganze Zahl mit der Eigenschaft $nr \equiv 1 \pmod{p}$, dann ist n ebenfalls eine Primitivwurzel modulo p .
- (c) Sei $p > 3$. Dann treten die Primitivwurzeln modulo p in Paaren r, r' mit $rr' \equiv 1 \pmod{p}$ und $r \not\equiv r' \pmod{p}$ auf.

Aufgabe 4 (schriftlich). Sei $p \equiv 1 \pmod{3}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass dann -3 ein quadratischer Rest modulo p ist.

Aufgabe 5 (mündlich). Sei p eine Primzahl. Für jedes $0 \neq q = p^k \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ (mit $k \in \mathbb{Z}$ und a, b und p paarweise teilerfremd) definieren wir die p -adische Norm von q als $|q|_p = p^{-k}$. Wir setzen $|0|_p = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $|\cdot|_p$ eine Norm ist, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt:

- (i) $|x|_p = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
- (ii) $|xy|_p = |x|_p |y|_p$.
- (iii) $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.

Zeigen Sie auch, dass sogar $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ gilt.

(b) Berechnen Sie die p -adische Distanz $|a - b|_p$ zwischen a und b in den folgenden Beispielen:

- (i) $a = 1, b = 26, p = 5$.
- (ii) $a = 1, b = 1/243, p = 3$.

Sei $D(a, r)$ eine offene Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x - a|_p < r\}$ mit Mittelpunkt a und Radius $r \in \mathbb{Q}$ und $b \in D(a, r)$. Zeigen Sie, dass $D(a, r) = D(b, r)$.

- (c) Beschreiben Sie die Elemente $a \in \mathbb{Q}$ mit $|a|_p \leq 1$. Sei $a \in \mathbb{Q}$ mit $|a|_p \leq 1$ für jede Primzahl p . Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{Z}$ sein muss.

<http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/>