Zahlentheorie: Übungsblatt 3
(für die Übungen am 8./9. November 2012)

Aufgabe 1 (schriftlich)**.** Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Eulerschen φ-Funktion:

(a) Wenn $m > 2$, dann ist $\varphi(m)$ gerade.

(b) Für jede positive ganze Zahl n gilt: $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$.

(c) Wenn $n \in \mathbb{N}$ insgesamt k verschiedene ungerade Primteiler hat, dann folgt: $2^k|\varphi(n)$.

Aufgabe 2 (schriftlich)**.** (a) Wie lautet die letzte Ziffer der Zahl 3^{400}? Wie lautet die letzte Ziffer von $222^{555} + 555^{222}$?

(b) Zeigen Sie, dass die Differenz der Quadrate $p^2 - q^2$ zweier Primzahlen $p > q > 3$ immer durch 12 teilbar ist.

Aufgabe 3 (mündlich)**.** (a) Beweisen Sie die Ungleichung $n - 1 > \sqrt{n}$ für $n \geq 3$ und die Ungleichung $n - \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2}$ für $n \geq 1$.

(b) Benutzen Sie die Ungleichungen aus Teil (a), um zu zeigen, dass $\frac{1}{2}\sqrt{n} \leq \varphi(n) \leq n$.

Aufgabe 4 (mündlich)**.** (a) Finden Sie eine einzige Kongruenz, die zu dem System von Kongruenzen $x \equiv 1 \pmod 4$ und $x \equiv 2 \pmod 3$ äquivalent ist.

(b) Finden Sie alle Lösungen des folgenden Systems:

$$2x \equiv 1 \pmod 5,\ 3x \equiv 9 \pmod 6,\ 4x \equiv 1 \pmod 7,\ 5x \equiv 9 \pmod{11}.$$

Aufgabe 5 (mündlich)**.** Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 3 \pmod 4$ und sei n das Produkt aller geraden Zahlen, die kleiner als p sind. Zeigen Sie, dass $n \equiv \pm 1 \pmod p$.

Aufgabe 6 (mündlich)**.** Sei $a = a_1 + \frac{1}{a_2+} \cdots \frac{1}{a_n}$ ein Kettenbruch mit Notation wie auf Blatt 2. Wir bezeichnen mit $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ den Zähler des Bruches, den man erhält, wenn man a als gewöhnlichen Bruch schreibt. Zeigen Sie, dass man $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ wie folgt berechnen kann: Man nehme das Produkt der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ addiere zu diesem alle $(n-2)$-fachen Produkte aus $a_1, a_2, \ldots, a_n$, bei dem Paare von aufeinander folgenden Zahlen a_i, a_{i+1} weggelassen wurden, addiere zu diesem wiederum $(n-4)$-fache Produkte bei dem zwei (nicht notwendigerweise aufeinander folgende) Paare von aufeinander folgenden Zahlen weggelassen wurden, usw.. Ein leeres Produkt wird dabei als 1 betrachtet. Zum Beispiel gilt

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = a_1a_2a_3a_4a_5 + a_3a_4a_5 + a_1a_4a_5 + a_1a_2a_5 + a_1a_2a_3 + a_5 + a_3 + a_1.$$

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/