Zahlentheorie: Übungsblatt 12
(für die Übung am 1. Februar 2013)

Aufgabe 1 (schriftlich)**.** Sei σ die Teilersummenfunktion, siehe Blatt 10. Zeigen Sie:

(a) Für $x \geq 2$ und $n = \prod_{p \leq x} p$ gilt $\sigma(n)/n > \sum_{p \leq x} 1/p$.

(b) $\limsup_{n \to \infty} \sigma(n)/n = \infty$.

Aufgabe 2 (mündlich)**.** (a) Seien Ω und ω wie in der Vorlesung definiert. Berechnen Sie $\omega(n)$ und $\Omega(n)$ für $11 \leq n \leq 20$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(n) = 2^{\omega(n)}$ multiplikativ ist.

Aufgabe 3 (schriftlich)**.** Beweisen Sie die folgenden Gleichungen, wobei L,Λ und Λ_n wie in der Vorlesung definiert seien:

(a) $\Lambda * \Lambda = -\mu L * L$.

(b) $L^3 = L^2 * \Lambda + 2L * L\Lambda + 1 * L^2\Lambda$.

(c) $\Lambda_3 = \Lambda_2 * \Lambda + L\Lambda_2$.

Aufgabe 4 (mündlich)**.** Für $x \in \mathbb{R}$ positiv und positive ganze Zahlen d und n, definiere

$$\lambda(d) = \lambda_x(d) = \mu(d) \ln^2(x/d)$$

und

$$\theta(n) = \theta_x(n) = 1 * \lambda(n) = \sum_{d|n} \lambda(d).$$

Beweisen Sie, dass

(a) $\theta_1(1) = 0$.

(b) Für $u \geq 1$ und p prim ist $\theta(p^u) = \ln p \ln(x^2/p)$.

(c) Sind $u, v \geq 1$ und p, q prim, dann ist $\theta(p^u q^v) = 2 \ln p \ln q$.

(d) Wenn m das Produkt der Primteiler von n ist, dann gilt $\theta(n) = \theta(m)$.

(e) Wenn n quadratfrei ist und p ein Primteiler von n ist, dann gilt

$$\theta_x(n) = \theta_x(n/p) - \theta_{x/p}(n/p).$$

(f) Wenn n drei oder mehr verschiedene Primteiler besitzt, dann ist $\theta(n) = 0$.

Aufgabe 5 (mündlich)**.** Wir definieren positive, reelle Zahlen A und a durch

$$A = \limsup_{x \to \infty} \vartheta(x)/x, \quad a = \liminf_{x \to \infty} \vartheta(x)/x.$$

Es gilt $a \leq A$ und der Primzahlsatz ist äquivalent zu der Aussage $A = a = 1$.

Im Folgenden werden wir die Selberg-Formeln nutzen, um zu zeigen, dass $A + a \leq 2$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass für hinreichend große x die Ungleichung $\vartheta(x) \geq (a - \epsilon)x$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass eine Folge reeller Zahlen x_i existiert, so dass x_i gegen unendlich geht und $\vartheta(x_i) \geq (A - \epsilon)x_i$ für hinreichend große x_i.

(c) Zeigen Sie, dass $A + a \leq 2$ [Hinweis: Ein Satz von Mertens könnte hilfreich sein.]

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/