Zahlentheorie: Übungsblatt 11
(für die Übungen am 24./25. Januar 2013)

Aufgabe 1 (schriftlich)**.** Die asymptotische Dichte einer Menge von natürlichen Zahlen sei definiert wie auf Blatt 10.

(a) Berechnen Sie die asymptotische Dichte der Menge der Primzahlen.

(b) Berechnen Sie die asymptotische Dichte der Menge der Primzahlpotenzen. [Hinweis: Wenn $P(x)$ die Anzahl der Primzahlpotenzen kleiner oder gleich x ist, dann gilt $P(x) = P(\sqrt{x}) + (P(x) - P(\sqrt{x})) \ll \pi(x)$.]

Aufgabe 2 (mündlich)**.** Seien ψ und ϑ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie:

(a) $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x})$ (verwenden Sie dazu nur den Satz von Chebyshev).

(b) $\psi(x) = \ln N$, wobei N das kleinste gemeinsame Vielfache aller positiven ganzen Zahlen ist, die kleiner oder gleich x sind.

Aufgabe 3 (mündlich)**.** (a) Wir bezeichnen mit p_n die $n$te Primzahl. Zeigen Sie, dass es positive reelle Zahlen α und β gibt, so dass

$$n^{\alpha n} < \prod_{i=1}^{n} p_i < n^{\beta n}.$$

(b) Beweisen Sie: Es gibt eine Konstante c, so dass für all hinreichend großen x eine Primzahl p existiert mit $x < p < (1+c)x$.

Aufgabe 4 (mündlich)**.** (a) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\sum_{x<p<2x} \frac{\ln p}{p} = O(1)$ gilt.

(b) Beweisen Sie, dass $\displaystyle\sum_{p \le x} \frac{\ln^2 p}{p} = \frac{\ln^2 x}{2} + O(\ln x)$ ist.

Aufgabe 5 (schriftlich)**.** (a) Sei $A \subset \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $p_A(n)$ die Anzahl der Partitionen von n, bei denen alle Summanden aus A stammen. Sei B die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

(i) Berechnen Sie $p_B(7)$.

(ii) Wenn C die Menge der geraden natürlichen Zahlen ist und $D = C \cup \{1\}$, dann gilt $p_D(2n) = p_D(2n+1)$.

(iii) Sei $A \subset \mathbb{N}$ beliebig und $p_A(n) \geq 1$ und $p_A(n_0) \geq 1$ für $n, n_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist $p_A(n) \leq p_A(n + n_0)$.

(b) Zeigen Sie, dass für die Anzahl der Partitionen von n, bezeichnet mit $p(n)$, gilt:

(i) $p(n) \geq 2^{[\sqrt{n}]}$.

(ii) $p(n) \geq (k+1)^{[\sqrt{n/k}]}$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$.

Vergleichen Sie dies mit den tatsächlichen Werten von $p(n)$ für kleine n.

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/