Zahlentheorie: Übungsblatt 10
(für die Übungen am 10./11. Januar 2013)

Aufgabe 1 (schriftlich). Sei $A \subset \mathbb{N}$ nicht leer. Die Menge der Vielfachen von A, bezeichnet mit $M(A)$, ist definiert als $M(A) = \{ma \mid a \in A, m \in \mathbb{N}\}$. Die Menge A heißt primitiv, wenn kein Element aus A ein anderes Element teilt. Zeigen Sie:

(a) Seien $\emptyset \neq A_1 \subsetneq A_2 \subset \mathbb{Z}$. Dann ist $M(A_1) \subsetneq M(A_2)$.

(b) Sei A^* die Untermenge von A von Zahlen, die durch keine andere Zahl in A teilbar sind. Dann ist A^* primitiv und $M(A) = M(A^*)$.

(c) Die Menge $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$ ist primitiv für $n \in \mathbb{N}$.

(d) Seien $\emptyset \neq A_1 \subset A_2 \subset \mathbb{Z}$ mit $M(A_1) = M(A_2)$. Dann gilt $M(A_1 \cap A_2) = M(A_1)$.

(e) Sei B eine Menge von Vielfachen einer Menge A. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte primitive Menge A^* mit $B = M(A^*)$.

Aufgabe 2 (mündlich). Sei $A \subset \mathbb{N}$. Die Zählfunktion $A(x)$ von A (mit $x \in \mathbb{R}$) zählt die Anzahl der positiven Elemente von A, die kleiner oder gleich x sind. Die asymptotische Dichte $d(A)$ ist definiert als $d(a) = \lim_{x\to\infty} A(x)/x$, falls der Grenzwert definiert ist. Sei $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Sind die Zahlen $a_i \in A$ paarweise teilerfremd, dann ist

$$d(M(A)) = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - \frac{1}{a_i}).$$

(b) Sei B_k die Menge der natürlichen Zahlen, die durch a_k teilbar sind aber nicht durch a_i für jedes $i < k$. Beweisen Sie, dass die asymptotische Dichte $d(B_k)$ definiert ist und berechnen Sie diese.

Aufgabe 3 (schriftlich). Sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ die Teilerfunktion aus Blatt 9. Eine Zahl heißt abundant, wenn $\sigma(n) > 2n$ ist. Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in \mathbb{N}$ mit $r \geq 2$ gilt $\sigma(rn) > r\sigma(n)$. Eine abundante Zahl heißt primitiv, wenn Sie durch keine abundante Zahl teilbar ist.

(b) Jede abundante Zahl ist ein Vielfaches einer primitiven abundanten Zahl.

Aufgabe 4 (mündlich). Sei d wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie:

(a) $\sum_{n\leq x} \frac{d(n)}{n} = \frac{\ln^2(x)}{2} + O(\ln(x))$.

(b) Sei $\alpha > 0$ und $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$. Definiere $g(x) = \sum_{n\leq x^{1/\alpha}} \frac{1}{n^\alpha} f(\frac{x}{n^\alpha})$. Dann gilt $f(x) = \sum_{n\leq x^{1/\alpha}} \frac{\mu(n)}{n^\alpha} g(\frac{x}{n^\alpha})$.

Aufgabe 5 (mündlich)**.** Definiere arithmetische Funktionen f und g durch

$$f(x) = \sum_{\substack{u,v\,\leq\, x\\(u,v)=1}} \frac{1}{uv}, \quad g(x) = \sum_{st\,\leq\, x} \frac{1}{st} = \sum_{n\,\leq\, x} \frac{d(n)}{n},$$

wobei die erste Summe über alle teilerfremden natürlichen Zahlen $u, v \leq x$ sei und die zweite Summe über alle natürlichen Zahlen s, t, deren Produkt nicht größer als x ist.

(a) Zeigen Sie, dass $g(x) = \sum_{r\leq\sqrt{x}} \frac{1}{r^2} f(\frac{x}{r^2})$. [Hinweis: Betrachten Sie gemeinsame Teiler von s und t und klammern Sie diese aus.]

(b) Folgern Sie, dass $f(x) = \sum_{r\leq\sqrt{x}} \frac{\mu(r)}{r^2} g(\frac{x}{r^2})$.

(c) Benutzen Sie Satz 7.9 aus der Vorlesung, um zu zeigen, dass

$$f(x) = 6/\pi^2 \sum_{n\leq x} \frac{d(n)}{n} + O\left(x^{-1/2} \sum_{n\leq x} \frac{d(n)}{\sqrt{n}}\right).$$

(d) Beweisen Sie, dass $f(x) = \frac{3}{\pi^2}\ln^2(x) + O(\ln(x))$. [Vorige Übungsaufgaben könnten nützlich sein.]

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/