Zahlentheorie: Übungsblatt 1
(für die Übungen am 25. Oktober 2012)

Aufgabe 1 (schriftlich)**.** Sei $H = \{3n+1 \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Ein Element $1 \neq p \in H$ heißt H-Primzahl, wenn 1 und p die einzigen Teiler von p sind, die in H liegen.

(a) Zeigen Sie, dass H multiplikativ abgeschlossen ist, nicht aber additiv.

(b) Besitzt jedes Element in H eine Zerlegung in H-Primzahlen? Wenn ein Element in H eine H-Primzahlzerlegung besitzt, ist diese eindeutig?

Aufgabe 2 (schriftlich)**.** Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen der Form $p = 4n+1$ (für $n \in \mathbb{N}$) gibt.

Aufgabe 3 (mündlich)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade.

(a) Zeigen Sie, dass das Faktorisierungsproblem für n (also das Finden ganzer Lösungen a, b der Gleichung $n = ab$) äquivalent ist zum Finden ganzer Lösungen x, y der Gleichung $n = x^2 - y^2$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl für die $k^2 \geq n$ gilt. Wir betrachten die Folge

$$k^2 - n, (k+1)^2 - n, (k+2)^2 - n, \ldots$$

Beweisen Sie, dass man nach endlich vielen Schritten eine Zahl $m \geq \sqrt{n}$ erhält, so dass $m^2 - n$ eine Quadratzahl ist (und somit eine Lösung der Gleichung $n = x^2 - y^2$).

(c) Warum kann man obige Folge nutzen, um alle Teiler von n zu bestimmen?

(d) Benutzen Sie dieses Verfahren, um 23449 zu faktorisieren.

Aufgabe 4 (schriftlich)**.** Ein endlicher Kettenbruch ist ein Ausdruck der Form

$$n_1 + \cfrac{n_2}{n_3 + \frac{n_4}{n_5 + \frac{n_6}{n_7 + \ldots}}},$$

wobei $n_i \in \mathbb{Z}$ sein sollen und wir annehmen, dass der Ausdruck endlich ist.

(a) Benutzen Sie den Euklidischen Algorithmus, um den ggT von 210 und 45 zu berechnen.

(b) Benutzen Sie die Rechnung aus Teil (a) um $\frac{210}{45}$ als Kettenbruch darzustellen und folgern Sie, dass sich jedes $z \in \mathbb{Q}$ als Kettenbruch darstellen lässt.

Aufgabe 5 (mündlich)**.** (a) Zeigen Sie, dass sich jede positive rationale Zahl q als Produkt von Primzahlen $q = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ schreiben lässt, wobei die ganzen Zahlen $n_1, \ldots, n_k$ eindeutig bestimmt sind.

(b) Eine ganze Zahl z heißt reine n-Potenz, wenn n alle Exponenten in der Primfaktorzerlegung von z teilt. Zeigen Sie, dass die $n$te Wurzel aus z irrational ist, wenn a keine reine n-Potenz ist.

Aufgabe 6 (mündlich)**.** Ein Tripel $(x, y, z) \subseteq \mathbb{N}^3$ mit $x^2 + y^2 = z^2$ heißt pythagoräisches Tripel. Es heißt weiterhin primitiv, wenn x, y und z keinen nicht-trivialen gemeinsamen Teiler haben. Zeigen Sie:

(a) Ist (x, y, z) ein primitives pythagoräisches Tripel, dann ist entweder x oder y gerade, aber nicht beide.

(b) Sei das Tripel wie oben und o.B.d.A. x gerade. Definiere $u = \frac{z-y}{2}$ und $v = \frac{z+y}{2}$. Dann sind u und v (ganze) Quadratzahlen.

(c) Es existieren teilerfremde Zahlen s, t mit $s > t, x = 2st, y = s^2 - t^2$ und $z = s^2 + t^2$.

[Wir werden auf dem nächsten Übungsblatt sehen, wie man dieses Resultat nutzen kann um zu zeigen, dass die Gleichung $x^4 + y^4 = z^4$ keine ganzzahligen Lösungen besitzt.]

http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/ZahlTheo-Koenig/