Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 14.12.2010
Aufgabenblatt 9

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion: Sei $f : X \to Y$ ein A-Modulhomomorphismus. Gilt

(1) f injektiv $\Rightarrow f|_{\mathrm{rad}X}$ injektiv? Umgekehrt?

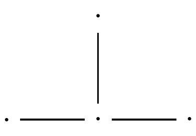
(2) f injektiv $\Rightarrow \bar{f} : X/\mathrm{rad}X \to Y/\mathrm{rad}Y$ injektiv? Umgekehrt?

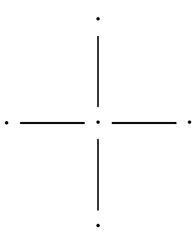
zu bearbeiten:

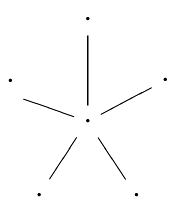
(1) Sei k ein Körper und Q der Köcher $\cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$ mit den Darstellungen $U = k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k$ und $V = k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} k$. Entscheiden Sie, ob U und V zueinander isomorph sind. Zerlegen Sie U und V jeweils in eine direkte Summe unzerlegbarer Darstellungen. Bestimmen Sie alle Homomorphismen von U nach V und alle von V nach U.

(2) Sei Q vom Typ $A_4 = \cdot - \cdot - \cdot - \cdot$ und seien $\overrightarrow{Q_1}, \ldots, \overrightarrow{Q_8}$ die zu den verschiedenen Orientierungen gehörenden Köcher. Entscheiden Sie, welche $k\overrightarrow{Q_i}$ zueinander isomorph sind und welche Teil- oder Quotientenalgebren von einander sind.

(3) Berechnen Sie die quadratische Form q für die folgenden Graphen und entscheiden Sie jeweils direkt, ob q positiv definit, positiv semidefinit oder indefinit ist.

$Q_1 =$ 

$Q_2 =$ 

$Q_3 =$ 

Bitte wenden!

(4) Beweisen Sie durch Angabe unendlich vieler paarweise nichtisomorpher unzerlegbarer Darstellungen, daß

$$\overrightarrow{Q} = \begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[d] & \cdot & \cdot \arrow[d] & \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[u] & \cdot \arrow[l] & \cdot \arrow[l] \\
 & & \cdot \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

unendlichen Darstellungstyp hat.

schriftliche Aufgaben: *(insgesamt 10 Punkte)*

(1) Sei $A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Algebrenhomomorphismus, und M ein B-Modul. Versehen Sie M mit einer natürlichen A-Modulstruktur. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) ${}_BM$ als B-Modul ist einfach $\iff$ ${}_AM$ als A-Modul ist einfach.

(b) ${}_BM$ unzerlegbar $\iff$ ${}_AM$ unzerlegbar.

(c) ${}_BM$ projektiv $\iff$ ${}_AM$ projektiv.

(2) Sei $A \hookrightarrow B$ nun ein injektiver Algebrenhomomorphismus. Diskutieren Sie die obigen Aussagen in diesem Fall.

(3) Sei $A \to B$ ein surjektiver oder injektiver Algebrenhomomorphismus. Sei M ein A-Modul. Hat M eine natürliche B-Modulstruktur?

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 21.12.2010 oder am Mittwoch, den 22.12.2010.

Die neunte Übung findet am Mittwoch, den 22.12.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t