

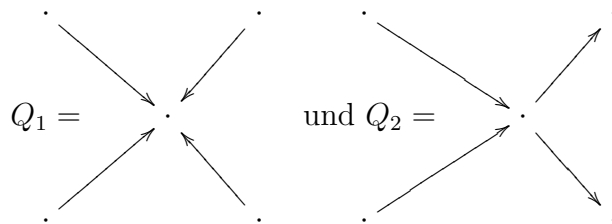
Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion:

- (1) Sei A eine halbeinfache Algebra. Wie sehen die Endomorphismenringe von A -Moduln aus?
- (2) Gibt es Algebren A , so daß für jeden projektiven A -Modul P gilt: $5|\dim_k P$?
Gibt es Algebren A , so daß für jeden projektiven A -Modul P gilt: $\dim_k P|5$?

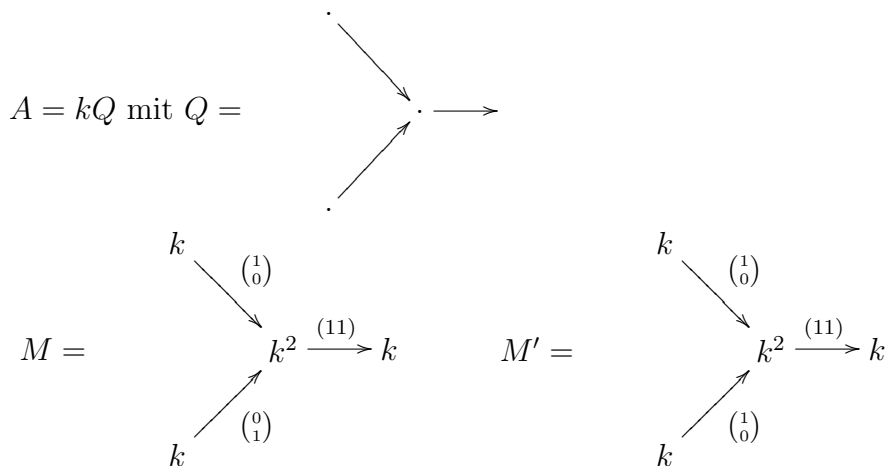
zu bearbeiten:

- (1) Seien



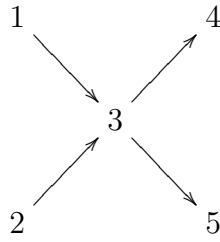
und $A_i = kQ_i$ die jeweiligen Wegealgebren. Bestimmen Sie für $i = 1, 2$ die unzerlegbaren projektiven A_i -Moduln und alle Homomorphismen zwischen diesen.

- (2) Bestimmen Sie für jede der folgenden Darstellungen M den Endomorphismenring $\text{End}_A(M)$ und eine Zerlegung $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$ in unzerlegbare direkte Summanden.



Bitte wenden!

(3) Sei $A = kQ$, wobei Q der folgende Köcher ist:



Bestimmen Sie die unzerlegbaren projektiven A -Moduln und jeweils mindestens eine Jordan-Hölder-Reihe. Sind die Jordan-Hölder-Reihen jeweils eindeutig?

- (4) Sei $P = Ae$ ein projektiver A -Modul und M ein A -Modul. Zeigen Sie: $\text{Hom}_A(P, M) \simeq eM (= \{em : m \in M\})$, als Vektorraum (über k wenn A eine k -Algebra ist). Sei P sogar unzerlegbar und $S = P/\text{rad}P$ einfach. Welche der folgenden Formeln für die Vielfachheit von S in einer Jordan-Hölder Reihe von M stimmt? (Beweis oder Gegenbeispiel)
- (a) $[M : S] = \dim_k eM$
 - (b) $[M : S] = \dim_k eM \cdot \dim_k S$
 - (c) $[M : S] = \dim_k eM / \dim_k S$

schriftliche Aufgaben: (10 Punkte)

Sei M ein Modul mit Kompositionsfaktoren S_1, \dots, S_n (die nicht notwendig verschieden sind). Diskutieren Sie (durch Beweise oder Gegenbeispiele) Implikationen zwischen den folgenden Aussagen:

- (1) M ist halbeinfach.
- (2) Für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ hat M eine Kompositionsreihe $M = M_n \supset M_{n-1} \supset \dots$ mit $M_i/M_{i-1} \simeq S_{\sigma(i)}$.
- (3) Für jedes i gilt: M hat einen Teilmodul $X \simeq S_i$.
- (4) Für jedes i seien S_{i_1}, \dots, S_{i_l} die zu S_i isomorphen Kompositionsfaktoren. Dann hat M einen Teilmodul $X \simeq S_{i_1} \oplus \dots \oplus S_{i_l}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 14.12.2010 oder am Mittwoch, den 15.12.2010.

Die achte Übung findet am Mittwoch, den 15.12.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite <http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t>