Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 07.12.2010
Aufgabenblatt 8

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion:

(1) Sei A eine halbeinfache Algebra. Wie sehen die Endomorphismenringe von $A-$Moduln aus?

(2) Gibt es Algebren A, so daß für jeden projektiven A-Modul P gilt: $5|\dim_k P$?
Gibt es Algebren A, so daß für jeden projektiven A-Modul P gilt: $\dim_k P|5$?

zu bearbeiten:

(1) Seien

$$Q_1 = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot & \\ \cdot \arrow[ur] & & \cdot \arrow[ul] \end{tikzcd} \quad \text{und } Q_2 = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ \cdot \arrow[ur] & & \cdot \end{tikzcd}$$

und $A_i = kQ_i$ die jeweiligen Wegealgebren. Bestimmen Sie für $i = 1, 2$ die unzerlegbaren projektiven A_i-Moduln und alle Homomorphismen zwischen diesen.

(2) Bestimmen Sie für jede der folgenden Darstellungen M den Endomorphismenring $\mathrm{End}_A(M)$ und eine Zerlegung $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots$ in unzerlegbare direkte Summanden.

$$A = kQ \text{ mit } Q = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & & \\ & \cdot \arrow[r] & {} \\ \cdot \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$$M = \begin{tikzcd} k \arrow[dr, "\binom{1}{0}"] & & \\ & k^2 \arrow[r, "(11)"] & k \\ k \arrow[ur, "\binom{0}{1}"'] & & \end{tikzcd} \qquad M' = \begin{tikzcd} k \arrow[dr, "\binom{1}{0}"] & & \\ & k^2 \arrow[r, "(11)"] & k \\ k \arrow[ur, "\binom{1}{0}"'] & & \end{tikzcd}$$

Bitte wenden!

(3) Sei $A = kQ$, wobei Q der folgende Köcher ist:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[ur] & & 5 \end{tikzcd}$$

Bestimmen Sie die unzerlegbaren projektiven A-Moduln und jeweils mindestens eine Jordan-Hölder-Reihe. Sind die Jordan-Hölder-Reihen jeweils eindeutig?

(4) Sei $P = Ae$ ein projektiver A-Modul und M ein A-Modul. Zeigen Sie: $\mathrm{Hom}_A(P, M) \simeq eM (= \{em : m \in M\})$, als Vektorraum (über k wenn A eine k-Algebra ist).
Sei P sogar unzerlegbar und $S = P/\mathrm{rad}P$ einfach. Welche der folgenden Formeln für die Vielfachheit von S in einer Jordan-Hölder Reihe von M stimmt? (Beweis oder Gegenbeispiel)
(a) $[M : S] = \dim_k eM$
(b) $[M : S] = \dim_k eM \cdot \dim_k S$
(c) $[M : S] = \dim_k eM / \dim_k S$

schriftliche Aufgaben: *(10 Punkte)*

Sei M ein Modul mit Kompositionsfaktoren $S_1, \ldots, S_n$ (die nicht notwendig verschieden sind). Diskutieren Sie (durch Beweise oder Gegenbeispiele) Implikationen zwischen den folgenden Aussagen:

(1) M ist halbeinfach.
(2) Für jede Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ hat M eine Kompositionsreihe $M = M_n \supset M_{n-1} \supset \ldots$ mit $M_i/M_{i-1} \simeq S_{\sigma(i)}$.
(3) Für jedes i gilt: M hat einen Teilmodul $X \simeq S_i$.
(4) Für jedes i seien $S_{i_1}, \ldots, S_{i_l}$ die zu S_i isomorphen Kompositionsfaktoren. Dann hat M einen Teilmodul $X \simeq S_{i_1} \oplus \ldots \oplus S_{i_l}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 14.12.2010 oder am Mittwoch, den 15.12.2010.

Die achte Übung findet am Mittwoch, den 15.12.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t