Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 30.11.2010
Aufgabenblatt 7

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion:

(1) Was ist das Radikal des Rings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (für $n \in \mathbb{N}$)?

(2) Sei A eine endlich-dimensionale Algebra. Sei $\varphi : M \to N$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Sind die folgenden Implikationen wahr oder falsch?
- (a) φ injektiv $\Rightarrow \varphi(\mathrm{rad}M) \subset \mathrm{rad}N$
- (b) φ surjektiv $\Rightarrow \varphi(\mathrm{rad}M) \supset \mathrm{rad}N$
- (c) φ surjektiv $\Rightarrow \varphi(\mathrm{rad}M) \subset \mathrm{rad}N$
- (d) $\mathrm{rad}M = 0 \Rightarrow \varphi$ surjektiv
- (e) $\mathrm{rad}N = 0 \Rightarrow \varphi$ surjektiv

zu bearbeiten:

(1) (a) Sei A eine halbeinfache k-Algebra. Bestimmen Sie das Zentrum $Z(A) = \{x \in A : xa = ax, \ \forall\ a \in A\}$. Zeigen Sie: $z \in Z(A)$, z nilpotent (das heißt $\exists n \ \in \mathbb{N} : z^n = 0) \Rightarrow z = 0$.

(b) Sei nun $B = kG$ eine Gruppenalgebra, wobei $p = \mathrm{char}\ k$ ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$ ist. Sei $x := \sum_{g\in G} g$. Zeigen Sie: $x \in Z(B)$ und $x^2 = 0$; also ist B nicht halbeinfach, und der Satz von Maschke ist optimal.

(2) Sei Q ein Köcher mit $\dim A < \infty$ für $A = kQ$. Zeigen Sie, daß gilt: $\dim(A/\mathrm{rad}A) = |Q_0|$ und $\dim(\mathrm{rad}A/(\mathrm{rad}A)^2) = |Q_1|$. Also kann man Information über Q aus der Wegealgebra kQ zurückerhalten. Finden Sie ähnliche Formeln für $\dim(e_iAe_j/e_i(\mathrm{rad}A)e_j)$ und für $\dim(e_i(\mathrm{rad}A)e_j/e_i(\mathrm{rad}A)^2e_j)$.

(3) Sei $A = kQ$ eine endlich-dimensionale Wegealgebra mit einfachen Moduln $S_i = ke_i$ ($i \in Q_0$). Sei $V = (V_i, \varphi(\alpha))$ eine Darstellung von A. Zeigen Sie, dass die Jordan-Hölder-Vielfachheiten von V genau die k-Dimensionen der V_i sind.

(4) Zerlegen Sie die folgenden Algebren in der Form $A = \oplus_i A_i$, wobei die A_i zweiseitige Ideale in A sind, die nicht weiter zerlegt werden können.
- (a) $A_1 = \mathrm{Mat}(n \times n, k)$
- (b) $A_2 = k[x]/(x^3)$
- (c) $A_3 = kQ$ für einen beliebigen Köcher Q
- (d) $A_4 =$ Diagonalmatrizen in A_1

Bitte wenden!

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Sei A eine Algebra, $M_n(A)$ der $n \times n$-Matrizenring über A, d.h. die Menge der Matrizen mit Einträgen in A. Zeigen Sie, dass gilt: $\mathrm{rad}(M_n(A)) = M_n(\mathrm{rad}A)$.

(2) *(5 Punkte)*

(a) Sei D ein Schiefkörper über einem Körper k. Bestimmen Sie, bis auf Isomorphie, alle einfachen Moduln, alle unzerlegbaren Moduln, und alle Moduln von $\mathrm{Mat}(n \times n, D)$.

(b) Sei $A = \oplus_{i=1}^{l} \mathrm{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$ eine halbeinfache Algebra. Sei M_i ein A_i-Modul, für $i = 1, \ldots, l$. Versehen Sie die direkte Summe $\oplus_{i=1}^{l} M_i$ mit einer A-Modul Struktur, und zeigen Sie, dass jeder A-Modul sich so schreiben lässt.

(c) Sei A eine endlich-dimensionale Algebra. Zeigen Sie, dass A halbeinfach ist genau dann, wenn jeder A-Modul M halbeinfach ist (d.h., M ist eine direkte Summe von einfachen A-Moduln).

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 07.12.2010 oder am Mittwoch, den 08.12.2010.

Die siebte Übung findet am Mittwoch, den 08.12.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t