Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 23.11.2010
Aufgabenblatt 6

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion: Sei A eine Algebra.

(1) Ist jedes Element a in rad$A$ nilpotent (d.h. $a^n = 0$ für irgendein n)?

(2) Gehört jedes nilpotente Element zum Radikal rad$A$?

zu bearbeiten:

(1) Sei $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Berechnen Sie rad kG und die einfachen $kG-$Moduln (in Abhängigkeit von char$(k) \in \mathbb{N}_0$).

(2) Sei X ein A-Modul, so daß $X/\text{rad}X$ einfach ist. Zeigen Sie, daß X unzerlegbar ist. Gilt auch die Umkehrung? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(3) Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen Köcher Q an und einen $kQ-$Modul M, der unzerlegbar ist, so daß gilt: $\dim_k \text{rad}M = n$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie einen Köcher Q an und einen $kQ-$Modul M, der unzerlegbar ist, so daß gilt: $(\text{rad}kQ)^n \cdot M \neq 0$, aber $(\text{rad}kQ)^{n+1} \cdot M = 0$.

(4) Sei A eine Algebra, und setze $I(A) := \{f \in \text{Hom}_A(A, A) : \text{Im}(f) \subset \text{rad}A\}$. Gilt $I(A) \cong \text{rad}A$? (Beweis oder Gegenbeispiel).

Für einen endlich-dimensionalen A-Modul M setze $I(M) := \{f \in \text{Hom}_A(M, M) : \text{Im}(f) \subset \text{rad}M\}$. Ist $I(M)$ ein zwei-seitiges Ideal in der Algebra $\text{End}_A(M)$? Gilt $I(M) = \text{radEnd}_A(M)$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Sei A eine k-Algebra, sei $f : M \to N$ ein surjektiver A-Modulhomomorphismus. Zeigen Sie: Die Menge allen (maximalen) Teilmoduln von M, die den Kern Ker(f) enthalten, ist in Bijektion mit der Menge allen (maximalen) Untermoduln von N. Daraus folgern Sie: Der Kern Ker(f) ist ein maximaler Teilmodul von M genau dann, wenn N einfach ist.

(2) *(5 Punkte)* Sei A_1 eine Teilalgebra (mit derselben Eins) von A_2. Gilt immer $\text{rad}A_1 \subset \text{rad}A_2$, oder sogar $\text{rad}A_1 = \text{rad}(A_2) \cap A_1$? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Bitte wenden!

(3) *(keine Punkte, nur für Interessenten)* Sei A eine endlich-dimensionale k-Algebra. Zeigen Sie:

(a) Ein Ideal $I \trianglelefteq A$ ist maximales zwei-seitiges Ideal genau dann, wenn der Quotient A/I einfach als Algebra ist.

(b) A ist einfach als Algebra genau dann, wenn A ein treuer einfache Modul S hat (d.h. die Strukturabbilding $\rho : A \to \mathrm{End}_k(S)$ ist injektiv).

(c) Der Annulator $\mathrm{Ann}(S)$ von einem einfachen A-Modul S ist ein maximales zwei-seitiges Ideal von A.

(d) Das Radikal $\mathrm{rad}A$ ist der Schnitt allen maximalen zwei-seitigen Idealen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 30.11.2010 oder am Mittwoch, den 01.12.2010.

Die sechste Übung findet am Mittwoch, den 01.12.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t