Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 16.11.2010
Aufgabenblatt 5

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion: Bestimmen Sie alle Wegealgebren $A = kQ$, für die gilt: $(\mathrm{rad} A)^2 = \{0\}$.

zu bearbeiten:

(1) Bestimmen Sie das Radikal für jede der folgenden Algebren (k ein Körper):

(a) $A_1 = k[x]/(x^3)$

(b) $A_2 = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2)$

(c) $A_3 = \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Algebra

(d) $A_4 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ k & \cdots & k \end{pmatrix}_{n \times n}$ (untere Dreiecksmatrizen)

(2) Bestimmen Sie das Radikal für jede der folgenden Algebren (k ein Körper), und entscheiden Sie, ob die Algebra eine Wegealgebra eines Köchers ist.

(a) $A_5 = \begin{pmatrix} k & k & 0 & k & k \\ 0 & k & 0 & k & k \\ 0 & k & k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

(b) $A_6 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ k & 0 & k & k \\ k & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

(c) $A_7 = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & k \\ k & k & 0 & k \\ k & 0 & k & k \\ k & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

(3) Sei A eine k-Algebra. Ein A-Modul $M \neq 0$ heißt zyklisch, wenn es ein $m \in M$ gibt mit $M = \{am : a \in A\}$ (m heißt dann erzeugendes Element).

(a) Zeigen Sie: M zyklisch $\Rightarrow M$ ist ein Quotient des regulären Moduls.

(b) Zeigen Sie: M einfach $\Rightarrow M$ zyklisch.

(c) Gilt M zyklisch $\Rightarrow M$ unzerlegbar?

Bitte wenden!

(4) Sei A eine k-Algebra, M ein zyklischer A-Modul mit Erzeuger m.
   (a) Definiere $\mathrm{Ann}(m) = \{a \in A : am = 0\}$ und $\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A : ax = 0 \ \forall \ x \in M\}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Ann}(m)$ und $\mathrm{Ann}(M)$ sind Teilmoduln von A und es gilt $M \simeq A/\mathrm{Ann}(m)$.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ann}(M)$ sogar ein zweiseitiges Ideal von A ist und dass $\mathrm{Ann}(m) = \mathrm{Ann}(M)$, wenn A kommutativ ist. Geben Sie ein Beispiel an mit $\mathrm{Ann}(m) \neq \mathrm{Ann}(M)$.

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Sei A eine k-Algebra, und $f : X \to Y$ ein Homomorphismus von A-Moduln. Zeigen Sie: Falls f ein Linksinverses hat (das heißt, es existiert ein A-Modulhomomorphismus $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$), dann gilt $Y \cong X \oplus \mathrm{Ker}(g)$. Also ist X ein direkter Summand von Y. Folgern Sie daraus: Sei $f : X \to X$ ein Endomorphismus von X mit $f = f^2$. Dann ist das Bild $\mathrm{Im}(f)$ ein direkter Summand von X.

(2) *(5 Punkte)* Sei A eine k-Algebra, $e = e^2 \in A$ mit $e \neq 0$, $P = Ae = \{ae : a \in A\}$.
Zeigen Sie, daß P ein A-Linksmodul ist und dass P ein direkter Summand von A ist.
Geben Sie einen Modul Q an, so daß $A \simeq P \oplus Q$ gilt (als Linksmoduln).
Sei nun $A = kQ$. Bestimmen Sie alle Elemente $e = e^2$ in A.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 23.11.2010 oder am Mittwoch, den 24.11.2010.

Die fünfte Übung findet am Mittwoch, den 24.11.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t