Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 9.11.2010
Aufgabenblatt 4

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion:

(1) Gibt es eine endlich- / unendlich-dimensionale Algebra A, deren regulärer Modul A keinen einfachen Teilmodul hat?

(2) Sei A eine Algebra, I ein Linksideal. Sind die folgende Aussagen wahr oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel)

- (a) A/I ist ein A-Linksmodul.
- (b) Es gilt $I \cdot A/I = \{0\}$, das heißt $I \subset \mathrm{Ann}(A/I)$.
- (c) Sei S ein einfacher A-Modul. Der Annullator $\mathrm{Ann}_A(S) = \{a \in A : a \cdot S = \{0\}\}$ ist ein maximales Linksideal.

zu bearbeiten:

(1) Sei Q der Köcher $\cdot \to \cdot$ und k ein Körper.

- (a) Sei V_1 die Darstellung $k \to 0$, V_2 die Darstellung $0 \to k$ and V_3 die Darstellung $k \xrightarrow{\mathrm{id}} k$. Finden Sie alle Homomorphismen zwischen den Darstellungen. Welche sind injektiv, welche surjektiv?
- (b) Wie sieht die reguläre Darstellung kQ aus? Bestimmen Sie alle surjektiven Homomorphismen von der regulären Darstellung auf die einfachen Darstellungen V_1 and V_2, und die Kerne dieser surjektiven Homomorphismen.

(2) Sei Q der Köcher $\cdot \to \cdot$ und k ein Körper.

- (a) Bestimmen Sie das Radikal J der Wegealgebra kQ durch zwei verschiedene Methoden, nämlich einmal mit J als Schnitt der maximalen Linksideale von kQ, und einmal durch eine der Charakterisierungen in 4.2 (3)-(6) in der Vorlesung.
- (b) Bestimmen Sie den Quotienten kQ/J. Entscheiden Sie, ob kQ/J eine Wegealgebra eines Köchers ist. Wenn ja, bestimmen Sie den Köcher von kQ/J.

(3) Sei $M = \mathbb{Q}[x]$ und $A = \mathbb{Q} < x, dx > /I$ mit $I =< dx \cdot x - x \cdot dx - 1 >$. (Hier ist $\mathbb{Q}{<}x, dx{>}$ der "nichtkommutative Polynomring" in den beiden Variablen x und dx. Dieser Ring ist isomorph zur Wegealgebra $\mathbb{Q}Q$ mit $Q =$  wobei die Pfeile x und dx heißen.)

Zeigen Sie, daß M ein A-Linksmodul ist durch $x \cdot (\sum a_i x^i) = \sum a_i x^{i+1}$ und $dx \cdot f(x) = f'(x)$. Ist M ein einfacher A-Modul?

Bitte wenden!

schriftliche Aufgaben:

(1) *(5 Punkte)* Sei A eine Algebra, und $f : M \to N$ ein Homomorphismus vom A-Modul M zum A-Modul N. Zeigen Sie, daß der Kern $\mathrm{Ker}(f) := \{m \in M : f(m) = 0\}$ ein Teilmodul von M ist, das Bild $\mathrm{Im}(f) := \{f(m) : m \in M\}$ ein Teilmodul von N, und daß der Quotient $M/\mathrm{Ker}(f)$ als A-Modul isomorph zu $\mathrm{Im}(f)$ ist.

(2) *(5 Punkte)* Seien X, Y und Z drei A-Linksmoduln und $\mathrm{Hom}_A(X, Z)$ die Menge der A-Linksmodulhomomorphismen. Zeigen Sie, daß $\mathrm{Hom}_A(X, Z)$ ein $k-$Vektorraum ist, und daß gilt: $\mathrm{Hom}_A(X \oplus Y, Z) \cong \mathrm{Hom}_A(X, Z) \oplus \mathrm{Hom}_A(Y, Z)$ als $k-$Vektorraum. Zeigen Sie, daß $\mathrm{End}_A(X) := \mathrm{Hom}_A(X, X)$ eine k-Algebra ist und daß $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ ein $\mathrm{End}_A(X)-$Rechtsmodul und ein $\mathrm{End}_A(Y)-$Linksmodul ist.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 16.11.2010 oder am Mittwoch, den 17.11.2010.

Die vierte Übung findet am Mittwoch, den 17.11.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t