Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 2.11.2010
Aufgabenblatt 3

# Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

**zur Diskussion:**

(1) Bestimmen Sie alle Köcher $Q$, so dass die Wegealgebra $KQ$ eine (nicht notwendig endlich-dimensionale) kommutative Algebra ist.

(2) Ist eine ein-dimensionale Darstellung einer Algebra notwendigerweise einfach? Und umgekehrt?

**zu bearbeiten:** Sei $K$ ein Körper.

(1) Sei $A = K[x]/x^5$ und $B_i := K[x]/x^i$ für $i = 0, \cdots, 5$. Schreiben Sie $B_i$ als $A$-Modul und als Darstellung von $A$, für $i = 0, \cdots, 5$. Welche dieser Darstellungen sind injektiv?

(2) Sei $G = \Sigma_3$. Schreiben Sie die triviale Darstellung, die Vorzeichendarstellung und die reguläre Darstellung jeweils als Modul.

(3) Bestimmen Sie das Zentrum $Z(A_i)$ für jede der folgenden Algebren:

$A_1 = (K)_{n\times n}$ (Matrizen)

$$A_2 = \begin{pmatrix} K & \cdots & K \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}_{n\times n} \quad \text{(obere Dreiecksmatrizen)}$$

$A_3 = K(\cdot \rightrightarrows \cdot)$ (Wegealgebra des Kronecker-Köchers)

$A_4 = K(\cdot \rightleftarrows \cdot)$

(4) Sei $Q_n$ (für $n \geq 1$ ) der Köcher

$$\underset{1}{\cdot} \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \underset{n-1}{\cdot} \longrightarrow \underset{n}{\cdot}$$

und sei $K$ ein Körper. Zeigen Sie, dass die Wegealgebra $KQ_n$ isomorph ist zur Algebra $A_n$ der oberen Dreiecksmatrizen

$$\begin{pmatrix} K & \dots & K \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq j \leq n \right\} \subset (K)_{n\times n}$$

Was ist die entgegengesetzten Algebren $A_n^{\mathrm{op}}$ von $A_n$? Finden Sie einen surjektiven Algebrenhomomorphismus von $A_n^{\mathrm{op}}$ nach $A_{n-1}^{\mathrm{op}}$, und schreiben Sie $A_{n-1}^{\mathrm{op}}$ als $A_n^{\mathrm{op}}$-Linksmodul und als Darstellung von $Q_n$.

*Bitte wenden!*

**schriftliche Aufgaben:**

(1) *(5 Punkte)* Sei $A$ eine Algebra mit Darstellungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ und zugehörigen Moduln $M_1$ und $M_2$. Zeigen Sie, dass die Darstellungen $\varphi_1$ und $\varphi_2$ äquivalent sind, genau dann wenn die Moduln $M_1$ und $M_2$ isomorph sind.

(2) *(10 Punkte)* Sei $K$ ein Körper und $Q$ der Köcher

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot & \\ \cdot \arrow[ur] & & \cdot \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

und sei

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[dr, "\varphi_1"'] & & U_2 \arrow[dl, "\varphi_2"'] \\ & V & \\ U_3 \arrow[ur, "\varphi_3"'] & & U_4 \arrow[ul, "\varphi_4"'] \end{tikzcd}$$

eine Darstellung von $Q$ über $K$. Zeigen Sie: wenn ein $\varphi_i$ nicht injektiv ist, dann hat die Darstellung einen direkten Summanden

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Ker}(\varphi_i) \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & 0 & 0 \arrow[l] \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Im Folgenden nehmen wir an, dass alle $\varphi_i$ injektiv sind. Geben Sie alle paarweise nichtisomorphen unzerlegbaren Darstellungen von $Q$ mit $V = K$ an. Ebenfalls für $V = K^2$.
Erklären Sie, warum die Darstellungstheorie dieses Köchers das Vier-Unterraum-Problem genannt wird, und was es bedeutet, die Lage von vier Geraden in einer Ebene zu beschreiben.

*Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 9.11.2010.*
*Die dritte Übung findet am Mittwoch, den 10.11.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.*