

## Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

### zur Diskussion:

- (1) Bestimmen Sie alle Köcher  $Q$ , so dass die Wegealgebra  $KQ$  eine (nicht notwendig endlich-dimensionale) kommutative Algebra ist.
- (2) Ist eine ein-dimensionale Darstellung einer Algebra notwendigerweise einfach? Und umgekehrt?

### zu bearbeiten: Sei $K$ ein Körper.

- (1) Sei  $A = K[x]/x^5$  und  $B_i := K[x]/x^i$  für  $i = 0, \dots, 5$ . Schreiben Sie  $B_i$  als  $A$ -Modul und als Darstellung von  $A$ , für  $i = 0, \dots, 5$ . Welche dieser Darstellungen sind injektiv?
- (2) Sei  $G = \Sigma_3$ . Schreiben Sie die triviale Darstellung, die Vorzeichendarstellung und die reguläre Darstellung jeweils als Modul.
- (3) Bestimmen Sie das Zentrum  $Z(A_i)$  für jede der folgenden Algebren:

$$A_1 = (K)_{n \times n} \text{ (Matrizen)}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} K & \cdots & K \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}_{n \times n} \text{ (obere Dreiecksmatrizen)}$$

$$A_3 = K(\cdot \rightrightarrows \cdot) \text{ (Wegealgebra des Kronecker-Köchers)}$$

$$A_4 = K(\cdot \rightleftarrows \cdot)$$

- (4) Sei  $Q_n$  (für  $n \geq 1$ ) der Köcher

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \cdot & \longrightarrow & \cdot \\ \text{i} & & & & \text{n-1} & & \text{n} \end{array}$$

und sei  $K$  ein Körper. Zeigen Sie, dass die Wegealgebra  $KQ_n$  isomorph ist zur Algebra  $A_n$  der oberen Dreiecksmatrizen

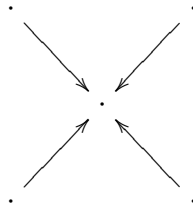
$$\begin{pmatrix} K & \cdots & K \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq j \leq n \right\} \subset (K)_{n \times n}$$

Was ist die entgegengesetzten Algebren  $A_n^{\text{op}}$  von  $A_n$ ? Finden Sie einen surjektiven Algebrenhomomorphismus von  $A_n^{\text{op}}$  nach  $A_{n-1}^{\text{op}}$ , und schreiben Sie  $A_{n-1}^{\text{op}}$  als  $A_n^{\text{op}}$ -Linksmodul und als Darstellung von  $Q_n$ .

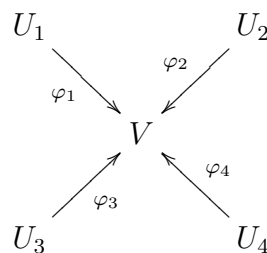
*Bitte wenden!*

**schriftliche Aufgaben:**

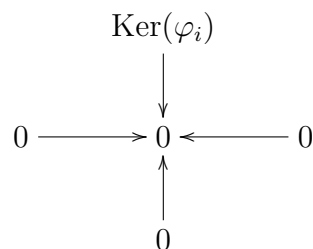
- (1) (5 Punkte) Sei  $A$  eine Algebra mit Darstellungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  und zugehörigen Moduln  $M_1$  und  $M_2$ . Zeigen Sie, dass die Darstellungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  äquivalent sind, genau dann wenn die Moduln  $M_1$  und  $M_2$  isomorph sind.
- (2) (10 Punkte) Sei  $K$  ein Körper und  $Q$  der Köcher



und sei



eine Darstellung von  $Q$  über  $K$ . Zeigen Sie: wenn ein  $\varphi_i$  nicht injektiv ist, dann hat die Darstellung einen direkten Summanden



Im Folgenden nehmen wir an, dass alle  $\varphi_i$  injektiv sind. Geben Sie alle paarweise nichtisomorphen unzerlegbaren Darstellungen von  $Q$  mit  $V = K$  an. Ebenfalls für  $V = K^2$ .

Erklären Sie, warum die Darstellungstheorie dieses Köchers das Vier-Unterraum-Problem genannt wird, und was es bedeutet, die Lage von vier Geraden in einer Ebene zu beschreiben.

*Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 9.11.2010. Die dritte Übung findet am Mittwoch, den 10.11.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.*