Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 26.10.2010
Aufgabenblatt 2

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zur Diskussion:

(1) Sei $A = \mathbb{Q}[x]$. Wie viele paarweise nichtisomorphe einfache $A-$Moduln gibt es? Sind alle einfachen A-Moduln eindimensional?

Sei $B = \mathbb{Q}[x]/x^3$. Wie viele paarweise nichtisomorphe einfache B-Moduln gibt es? Sind alle einfachen $B-$Moduln eindimensional?

(2) Sei Q ein Köcher, und V eine unzerlegbare Darstellung von Q über einem Körper k. Sind dann alle $V(i)$ (für $i \in Q_0$) entweder 0 oder k?

(3) Sei k ein Körper, und Q der Köcher:

$$\underset{1}{\cdot} \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \underset{n-1}{\cdot} \longrightarrow \underset{n}{\cdot}$$

und $V_{s,t}$ die Darstellung (für $1 \leq s < t \leq n$): $V_{s,t}(i) = k$, wenn $s \leq i \leq t$, und 0 sonst; die linearen Abbildungen sollen Identitäten sein soweit möglich und Nullabbildungen sonst. Wann gibt es nicht-triviale Homomorphismen zwischen den $V_{s,t}$?

zu bearbeiten:

(1) Sei $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, A eine $s \times s$-Matrix mit Einträgen in einem Körper k. Wann ist $\rho : \overline{a} = a + n\mathbb{Z} \mapsto A^a$ eine Darstellung von G?

(2) Sei k ein Körper und A die $k-$Algebra der $2 \times 2-$Matrizen mit Einträgen in k. Entscheiden Sie, ob A eine Darstellung auf einem eindimensionalen $k-$Vektorraum besitzt. Entscheiden Sie, ob A eine unzerlegbare Darstellung auf einem zweidimensionalen $k-$Vektorraum besitzt.

(3) Sei $A_1 = kQ_1$ für den Köcher $Q_1 = \cdot \to \cdot \to \cdot$ und sei $A_2 = kQ_2$ für den Köcher $Q_2 = \cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$. Zerlegen Sie A_1 in eine direkte Summe von Linksidealen, die als Darstellungen unzerlegbar sind, und bestimmen Sie alle zweiseitigen Ideale in A_2.

Bitte wenden!

(4) Sei $A = kQ$ für folgenden Köcher Q:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & & \cdot \\ & \cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ \cdot \arrow[ur] & & \cdot \end{tikzcd}$$

Geben Sie unendlich viele paarweise nichtisomorphe Darstellungen von A an (mit Begründung).

schriftlich zu bearbeiten:

(1) *(5 Punkte)* Entscheiden Sie, ob die reguläre Darstellung der Gruppenalgebra $\mathbb{C}\Sigma_2$ der symmetrischen Gruppe Σ_2 unzerlegbar ist. Wenn zerlegbar, schreiben Sie die reguläre Darstellung als eine direkte Summe von unzerlegbaren Teildarstellungen.

(2) *(5 Punkte)* Sei $Q = \cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$ Zeigen Sie, dass kQ isomorph ist zur Algebra

$$\begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} : a, b, c, d, e \in k \} \subset (k)_{3\times 3}$$

(3) *(keine Punkte, nur für Interessenten)* Entscheiden Sie, ob die reguläre Darstellung der Gruppenalgebra $\mathbb{C}\Sigma_3$ der symmetrischen Gruppe Σ_3 unzerlegbar ist. Wenn zerlegbar, schreiben Sie die reguläre Darstellung als eine direkte Summe von unzerlegbaren Teildarstellungen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 2.11.2010.
Die zweite Übung findet am Mitwoch, den 3.11.2010, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.