Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 01.02.2011
Aufgabenblatt 14

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zu bearbeiten:

(1) Sei k ein Körper und $\mathcal{C}$ eine k-lineare Kategorie mit einem Objekt. Konstruieren Sie aus $\mathcal{C}$ eine k-Algebra A. Identifizieren Sie einen A-Modul mit einem Funktor $\mathcal{C} \to k$-Vect, wobei k-Vect die Kategorie der k-Vektorräume ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Einbettung $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ ein Epimorphismus von Ringen ist.

(3) Sei $A = kQ$ eine Wegealgebra, P unzerlegbar projektiv und M irgendein unzerlegbarer Modul. Bestimmen Sie $\mathrm{Hom}_A(M, P)$.

(4) Sei k ein Körper, und Q der Köcher

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \\ & \cdot \arrow[d] & \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

Für $(\alpha, \beta) \in k \times k$, sei $M_{\alpha,\beta}$ die Darstellung

$$\begin{tikzcd} k \arrow[dr, "\binom{1}{0}"] & & k \arrow[dl, "\binom{0}{1}"] \\ & k^2 \arrow[d, "{(\alpha,\beta)}"'] & \\ & k & \end{tikzcd}$$

Entscheiden Sie, wann $M_{\alpha,\beta}$ unzerlegbar ist. Zeigen Sie: Wenn $M_{\alpha,\beta}$ und $M_{\gamma,\delta}$ unzerlegbar sind, dann sind sie isomorph.

schriftliche Aufgaben: *(10 Punkte)*

(1) Schreiben Sie die Menge $\mathbb{N}$ als Kategorie, so dass die natürlichen Zahlen Objekte werden und es von m nach n genau einen Morphismus gibt, den wir mit $n - m \in \mathbb{Z}$ bezeichnen.

(2) Sei Q ein Köcher mit unorientiertem Graphen

$$A_n \ (n \geq 1) \qquad \overset{1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{2}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{3}{\circ}\cdots\overset{n-1}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\overset{n}{\circ}$$

Zeigen Sie, dass die quadratische Form q_Q genau $\frac{n(n+1)}{2}$ positive Wurzeln hat, nämlich $e_1, \ldots, e_n$ und $e_i + e_{i+1} + \ldots + e_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$. Bestimmen Sie alle unzerlegbaren Darstellungen von Q.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 08.02.2011 oder am Mittwoch, den 09.02.2011.

Die vierzehnte Übung findet am Mittwoch, den 09.02.2011, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t