Steffen Koenig
Qunhua Liu

Dienstag, 25.01.2011
Aufgabenblatt 13

Übungen zur Vorlesung Darstellungstheorie von Algebren

zu bearbeiten:

(1) Sei Q ein Köcher. Schreiben Sie Q als Kategorie, so daß die Objekte den Punkten entsprechen und die Wege zu Morphismen werden.

(2) Sei G eine Gruppe und $\mathfrak{U}$ die Menge aller Untergruppen von G. Definieren Sie eine Kategorie, deren Objekte die Elemente von $\mathfrak{U}$ sind, mit Konjugation mit Gruppenelementen als Morphismen.

(3) Sei A eine endlich-dimensionale Algebra. Zeigen Sie, dass jeder Modul Teilmodul eines injektiven Moduls ist.

(4) Sei k ein Körper, Q der Köcher $\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\ 2 & 3 \arrow[l, "\gamma"] \end{tikzcd}$, M die Darstellung $\begin{tikzcd} k \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ k & k \arrow[l, "0"] \end{tikzcd}$, und N die Darstellung $\begin{tikzcd} k \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "0"] & \\ k & k \arrow[l, "1"] \end{tikzcd}$

(a) Bestimmen Sie das Radikal von M und N.

(b) Bestimmen Sie die Annullatoren $\mathrm{Ann}M$ und $\mathrm{Ann}N$ von M und N.

(c) Zeigen Sie, dass M ein projektiver $kQ/(\mathrm{Ann}M)$-Modul ist, und N ein injektiver $kQ/(\mathrm{Ann}N)$-Modul.

schriftliche Aufgaben: *(10 Punkte)*

(1) Seien U und V zwei Vektorräume, und $f : U \to V$ eine k-linea Abbildung. Sei $f^* : V^* \to U^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, die duale Abbildung. Zeigen Sie, daß zu f^* genau die transponierte Matrix von f gehört (bezüglich der dualen Basen).

(2) Sei G eine endliche abelsche Gruppe, und k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass jede einfache Darstellung von G über k eindimensional sein muss.

[Hinweis: Schurs Lemma]

Abgabe der schriftlichen Aufgaben ist in der Vorlesung am Dienstag, den 01.02.2011 oder am Mittwoch, den 02.02.2011.

Die dreizehnte Übung findet am Mittwoch, den 02.02.2011, 8-9:30 Uhr im Seminarraum 7.527 des Instituts für Algebra und Zahlentheorie statt.

Alle Aufgabenblätter und ein Glossar finden Sie auf der Webseite
http://www.iaz.uni-stuttgart.de/LstAGeoAlg/Koenig/WS1011.t