Stuttgart, 10.2010-02.2011

Glossar zur Vorlesung:

Darstellungstheorie von Algebren

§1. Beispiele und Definitionen

1.1 Definition

Sei G eine Gruppe, k ein Körper, V ein (endlich-dimensionaler) k-Vektorraum. Eine Darstellung von G auf V ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho : G \to GL(V)$.

Beispiel: G Gruppe, $\rho : G \to GL(k) = k^*$ mit $\rho(g) = 1 = (1)_{1\times 1}\ \forall g \in G$ ist immer eine Darstellung, die triviale Darstellung.

Beispiel: Σ_n symmetrische Gruppe, $\rho : \Sigma_n \to GL(k) = k^*$ mit $\rho(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ heißt Vorzeichendarstellung.

Beispiel: Die symmetrische Gruppe Σ_n permutiert die Koordinatenachsen $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ des n-dimensionalen Vektorraums V. Dadurch wird die Permutationsdarstellung definiert: $\rho : \Sigma_n \to GL(V)$ mit $\rho(\sigma)(e_i) = \sigma(e_i)$.

Beispiel: Die symmetrische Gruppe $\Sigma_2 = \{1, \sigma\}$, als Galoisgruppe der Körpererweitung $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$, operiert auf den $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^2$ mit Basis $\{1, \sqrt{2}\}$ und induziert eine Darstellung $\rho : \Sigma_2 \to GL(\mathbb{Q}^2)$ mit $\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel: $G = GL(V)$ die allgemeine lineare Gruppe (V ein Vektorraum über einem Körper k), $\rho : G \to GL(k)$ mit $g \mapsto \det(g)$ heißt Determinantendarstellung.

1.2 Definition

Sei G eine Gruppe. Darstellungen $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ und $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ (über demselben Körper k) heißen äquivalent oder isomorph $\Leftrightarrow \exists$ k-Vektorraum-Isomorphismus $f : V_1 \to V_2$ so daß gilt

$$\rho_2(g)(v_2) = f(\rho_1(g)(f^{-1}(v_2))),\ \forall v_2 \in V_2, g \in G.$$

Beispiel: $G = \Sigma_n$ die symmetrische Gruppe. Die triviale Darstellung ist äquivalent zu der Vorzeichendarstellung genau dann, wenn $n = 1$ oder $char(k) = 2$.

Beispiel: $G = GL(V)$ die allgemeine lineare Gruppe. Die triviale Darstellung ist äquivalent zu der Determinantendarstellung genau dann, wenn $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$, der Körper mit zwei Elementen.

Definition: Seien $\rho_1 : G \to GL(U)$ und $\rho_2 : G \to GL(V)$ Darstellungen einer Gruppe G über demselben Körper k. Dann ist die direkte Summe $\rho_1 \oplus \rho_2$ der Darstellungen gegeben durch $\rho : G \to GL(U \oplus V)$ mit

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

wobei $(U \oplus V)$ die direkte Summe von Vektorräumen ist. Die direkte Summe von n Kopien von ρ_1 wird mit ρ_1^n gezeichnet.

Beispiel: Die Permutationsdarstellung der symmetrischen Gruppe Σ_3 auf $\mathbb{R}^3$ zerfällt in eine direkte Summe von trivialen Darstellung und einer zwei-dimensionalen Darstellung.

1.3 Definition
Ein Köcher $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ist ein gerichteter Graph mit (endlicher) Ecken-Menge Q_0, (endlicher) Kanten-Menge Q_1 und Abbildungen $s, t : Q_1 \to Q_0$, die einer Kante α ihren Anfangspunkt $s(\alpha)$ und ihren Endpunkt $t(\alpha)$ zuordnen.

1.4 Definition
Sei k ein Körper und Q ein Köcher. Eine Darstellung von Q (über k) besteht aus zwei Zuordnungen:
$Q_0 \ni i \mapsto V(i)$, k-Vektorraum
$Q_1 \ni \alpha \mapsto V(\alpha) : V(s(\alpha)) \to V(t(\alpha))$, k-lineare Abbildung

Beispiele:

(1) Darstellungen eines Punkts $\cdot$ (über einem Körper k) sind k-Vektorräume.

(2) Darstellungen eines Pfeils $\cdot \to \cdot$ (über einem Körper k) sind k-lineare Abbildungen.

(3) Darstellungen des Kronecker Köchers $\cdot \rightrightarrows \cdot$ (über einem Körper k) sind Paare von k-linearen Abbildungen, die beide in demselben Vektorraum U starten und in demselben Vektorraum V enden.

(4) Darstellungen des Jordan Köchers $\cdot \circlearrowright$ (über einem Körper k) sind k-lineare Abbildungen, die in demselben Vektorraum V starten und enden.

1.5 Definition
Sei Q ein Köcher, k ein Körper, U und V Darstellungen von Q (über k).

(a) Ein Homomorphismus $f : U \to V$ ist ein Satz von linearen Abbildungen: $f(i)$ für $i \in Q_0$, wobei $f(i) : U(i) \to V(i)$, so daß $\forall\ \alpha \in Q_1, i \xrightarrow{\alpha} j$, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} U(i) \arrow[r, "U(\alpha)"] \arrow[d, "f(i)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & U(j) \arrow[d, "f(j)"] \\ V(i) \arrow[r, "V(\alpha)"'] & V(j) \end{tikzcd}$$

d.h. $V(\alpha) \circ f(i) = f(j) \circ U(\alpha)$.
f heißt Isomorphismus: $\Leftrightarrow$ alle $f(i)$ sind Vektorraum-Isomorphismen.
U und V sind isomorph (als Darstellungen von Q) : $\Leftrightarrow \exists f : U \to V$ Isomorphismus.

(b) Die direkte Summe von $U \oplus V$ ist die Darstellung mit $(U \oplus V)(i) := U(i) \oplus V(i)$ (direkte

Summe von Vektorräumen) und

$$(U \oplus V)(\alpha) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & 0 \\ 0 & V(\alpha) \end{pmatrix}$$

Eine Darstellung W von Q heißt <u>zerlegbar</u>: $\Leftrightarrow$ $W \neq 0$-Darstellung (d.h. $\exists i : W(i) \neq 0$), und $\exists U \neq 0, V \neq 0$ mit $W \simeq U \oplus V$.
W ist <u>unzerlegbar</u> :$\Leftrightarrow$ W ist nicht zerlegbar.

Beispiele:

(1) Darstellungen U und V des Köchers $Q = \cdot$ über einem Körper k sind isomorph, genau dann wenn sie als k-Vektorräume isomorph sind. Insbesondere, V ist eine unzerlegbare Darstellung $\iff$ $V \cong k$.

(2) Der Köcher $\cdot \to \cdot$ hat genau 3 unzerlegbare Darstellungen: $k \to 0$, $0 \to k$, und $k \xrightarrow{\mathrm{Id}} k$.

§2. Algebren, Darstellungen und Moduln

2.1 Definition

Sei k ein Körper, A ein Ring. A heißt <u>k-Algebra</u> (Algebra über k) :$\Leftrightarrow$ A ist ein k-Vektorraum und die Vektorraum-Struktur ist verträglich mit der Ringstruktur von A, d.h. es gilt:

$$\lambda = \lambda 1_A, \quad \lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \; \forall a, b \in A, \lambda \in k$$

Äquivalente Formulierung: A Ring, $Z(A)$ Zentrum, also $Z(A) = \{a \in A : ab = ba, \; \forall b \in A\}$, A heißt dann Algebra über k, wenn k ein Teilring von $Z(A)$ ist.

Beispiele:

(1) $A = k = Z(A)$
(2) $A = \mathbb{R} \supset k = \mathbb{Q}$, $A = Z(A)$
(3) $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset k = \mathbb{Q}$, $A = Z(A)$
(4) $A = (k)_{n \times n} \supset k$, $k \cong Z(A)$
(5) A der Ring der oberen Dreieckesmatrizen mit Einträgen in k, $k \cong Z(A)$
(6) $A = k[x]$ Ring der Polynome in einer Variablen, $A = Z(A)$
(7) $A = k[x]/(x^n) \supset k$, $A = Z(A)$, für $n \geq 1$

2.2 Definition

(a) Seien A und B k-Algebren. Ein <u>Algebrenhomomorphismus</u> $\varphi : A \to B$ ist ein k-linearer Ringhomomorphismus, also:

$$\varphi(1_A) = 1_B, \; \varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2), \; \varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2), \varphi(\lambda a_1) = \lambda \varphi(a_1)$$

für alle a_1, a_2 in A, alle λ in k.

(b) Sei A eine k-Algebra, V ein k-Vektorraum, B die k-Algebra $B = \mathrm{End}_k(V)$ die Algebra der $\dim V \times \dim V$-Matrizen über k. Eine <u>Darstellung</u> ρ von A auf V (oder, in B) ist ein Algebrenhomomorphismus $\rho : A \to B$.

Beispiele:

(1) $A = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix} \hookrightarrow B = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix}$, $\rho : a \mapsto a$

(2) $A = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix} \to B = (k)$, $\rho : a = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto z$

(3) $A = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix} \to B = (k)$, $\rho : a = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto x$

(4) $A = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & k \end{pmatrix} \to B = (k)$, $\rho : a = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mapsto y$ ist keine Darstellung von A.

2.3 Definition
Sei G eine endliche Gruppe, k eine Körper. Die Gruppenalgebra $A = kG$ ist ein k-Vektorraum mit Basis $\{g : g \in G\}$ und Multiplikation

$$(\sum_{g \in G} \lambda_g g)(\sum_{h \in G} \mu_h h) = \sum_{j \in G} (\sum_{g,h \in G:\ g \cdot h = j} \lambda_g \mu_h) j.$$

Die Multiplikation in kG ist also die lineare Erweiterung der Gruppenmultiplikation.

Beispiel:

(1) $G = \{e\}$, kG ist ein k-Vektorraum mit Basis e. Die Multiplikation in kG wird gegeben durch

$$(\lambda e)(\mu e) = (\lambda\mu)e, \ \ \forall \lambda, \mu \in k.$$

Also, $kG \cong k$ durch $\lambda e \mapsto \lambda$.

(2) $G = \{1, \sigma\}$, $\sigma^2 = 1$, kG ist ein k-Vektorraum mit Basis $1, \sigma$. Die Multiplikation wird gegeben durch

$$(\alpha 1 + \beta\sigma)(\lambda 1 + \mu\sigma) = (\alpha\lambda + \beta\mu)1 + (\alpha\mu + \beta\lambda)\sigma$$

für alle $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ in k.

2.4 Proposition
Sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper. Jede Darstellung $\rho : kG \to B = \mathrm{End}(V)$ (V Vektorraum über k) der Gruppenalgebra definiert durch Einschränkung eine Darstellung von G, und jede Darstellung der Gruppe G ist die Einschränkung von genau einer Darstellung der Gruppenalgebra kG.

2.5. Definition
Sei $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ein Köcher und k ein Körper. Ein Weg in Q ist eine endliche Folge $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von Pfeilen $\alpha_i \in Q_1$ mit $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ oder (für $n = 0$) ein Element $i \in Q_0$. Die Wegealgebra $A = kQ$ von Q ist ein k-Vektorraum mit Basis $\{$alle Wege in $Q\}$ und Multiplikation durch Aneinanderhängen von Wegen:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \ldots, \beta_l) = \begin{cases} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_l) & \text{falls } t(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bezeichnet die Punkte mit e_i statt i für $i \in Q_0$. Das Einselement in kQ ist $\sum_{i \in Q_0} e_i$. Klar ist: $e_i^2 = e_i$ und $e_i e_j = 0$ wenn $i \neq j$.

Beispiele:

(1) $Q = \cdot_1$, kQ hat Basis $\{e_1\}$, $kQ \cong k$ durch $e_1 \mapsto 1_K$.

(2) $Q = \cdot_1 \to \cdot_2$, kQ ist isomorph zur Algebra der 2×2 oberen Dreiecksmatrizen.

(3) $Q = \cdot_1 \to \cdot_2 \to \ldots \to \cdot_n$, kQ ist isomorph zur Algebra der $n \times n$ oberen Dreiecksmatrizen.

(4) $Q = \cdot \circlearrowright$ kQ ist isomorph zum Polynomring in einer Variablen.

2.6 Proposition
Die Wegealgebra $A = kQ$ ist endlich-dimensional über $k \Leftrightarrow Q$ enthält keine Schleifen und keine orientierten Zyklen.

Notation: Q ein Köcher, Q^{op} der entgegengesetzte Köcher, d.h. s, t vertauscht.
A eine Algebra, A^{op} die entgegengesetzte Algebra durch $a \cdot_{A^{\text{op}}} b = b \cdot_A a$.

2.7 Proposition
Sei Q ein Köcher, $A = kQ$ Wegealgebra, $e_i (i \in Q_0)$ die Wege der Länge 0. Jede Darstellung $\varphi : A^{\text{op}} \to \text{End}_k(V)$ von A^{op} in V liefert dann eine Darstellung von Q mit $V_i = \varphi(e_i)(V)$, und jede Darstellung von Q ist von dieser Form, wobei V jeweils eindeutig ist.

2.8 Definition
Sei A eine k-Algebra. Ein A-Linksmodul M ist ein k-Vektorraum M mit einer Abbildung $A \times M \to M, (a, m) \mapsto a \cdot m$, so daß gilt:
$1_A \cdot m = m, \ \forall m \in M$
$a(n + m) = an + am, \ \forall a \in A, n, m \in M$
$(a + b)m = am + bm, \ \forall a, b \in A, m \in M$
$(ab)m = a(bm), \ \forall a, b \in A, m \in M$
$(a\lambda)m = a(\lambda m) = \lambda(am), \ \forall a \in A, m \in M, \lambda \in k.$

Analog ist ein A-Rechtsmodul durch $M \times A \to M$, $(m, a) \mapsto m \cdot a$ festgelegt. Der Unterschied zu Linksmoduln ist im vierten Axiom:
$m(ab) = (ma)b, \ \forall a, b \in A, m \in M.$
Es gilt: A-Linksmodul = A^{op}-Rechtsmodul.
Linksmoduln werden mit ${}_AM$ bezeichnet, Rechtsmoduln mit M_A.

2.9 Proposition
Sei A eine k-Algebra (k ein Körper).
(a) Sei $\varphi : A \to \text{End}_k(V)$ eine Darstellung von A. Dann ist V ein A-Linksmodul durch $a \cdot v := \varphi(a)v$.
(b) Sei M ein A-Linksmodul. Dann hat A eine Darstellung $\varphi : A \to \text{End}_k(M)$ mit $\varphi(a)(m) :=$

$a \cdot m$.

A Algebra $\Rightarrow A$ ist A-Linksmodul durch $A \times A \to A, (a, b) \mapsto ab$; dieser Modul heißt regulärer A-Modul.
Die zugehörige Darstellung ($\varphi(a) = a\cdot -$ auf A, (Linksmultiplikation mit a) heißt reguläre Darstellung.
Jedes Linksideal $M \subset A$ ist ein Untermodul des regulären A-Moduls, und umgekehrt.
Der entsprechende Quotient A/M ist auch ein wohldefinierter A-Modul, durch $A \times A/M \to A/M$, $(a, b + M) \mapsto ab + M$.

§3. Einfache Moduln

3.1 Definition

Sei A eine k-Algebra, X, Y und S seien $A-$Linksmoduln.
(a) X heißt Teilmodul (oder Untermodul) von Y (und die zugehörige Darstellung heißt Teil- oder Unterdarstellung): $\Leftrightarrow$ X ist ein Untervektorraum von Y und die Strukturabbildung $A \times X \to X$ ist die Einschränkung der Strukturabbildung von Y, $A \times Y \to Y$.
X heißt echter Teilmodul von $Y :\Leftrightarrow X \neq Y$.
(b) S heißt einfacher A-Modul (und die zugehörige Darstellung heißt einfach oder irreduzibel): $\Leftrightarrow S \neq \{0\}$ und S hat außer $\{0\}$ keinen echten Teilmodul.

Jeder endlich-dimensionale Moduln enthält einen einfachen Untermodul.

Beispiele:

(1) $A = k$: Jeder einfache Modul über A ist isomorph zu k.
(2) $A = kG$ eine Gruppenalgebra. Der triviale Modul k ist einfach, da $\dim(k) = 1$.
(3) $A = k\Sigma_n$ Gruppenalgebra der symmetrischen Gruppe. Der Vorzeichenmodul k, definiert durch $\sigma \cdot \lambda := \mathrm{sgn}(\sigma)\lambda$, ist auch einfach.
(4) $A = kQ$ eine Wegealgebra eines Köchers Q. Es gibt mindestens $|Q_0|$ nichtisomorphe einfache Moduln: S_i ($i \in Q_0$) definiert durch $S_i(j) = k$ falls $j = i$ und 0 sonst.
(5) $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \supset k = Q$. Der reguläre A-Modul ist einfach, mit Dimension 2.

3.2 Definition

Sei A eine $k-$Algebra, X, Y seien A-Moduln. Ein Modulhomomorphismus $f : X \to Y$ ist eine k-lineare Abbildung, welche die A-Modul-Struktur erhält:

$$f(ax) = af(x),\ \forall a \in A, x \in X.$$

f ist ein Isomorphismus: $\Leftrightarrow$ f ist bijektiver Homomorphismus.
Damit sind auch die Begriffe Homomorphismus und Isomorphismus von Darstellungen definiert.
Die Menge der A-Homomorphismen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$.

Sei $f : X \to Y$ ein Modulhomomorphismum. Dann ist der Kern $\mathrm{Ker}(f) := \{a \in X : f(x) = 0\}$ ein Untermodul von X, das Bild $\mathrm{Im}(f) := \{f(x) : x \in X\}$ ein Untermodul von Y, und der Quotient $X/\mathrm{Ker}(f)$ isomorph zu $\mathrm{Im}(f)$.

3.3 Proposition
Sei A eine k-Algebra, M ein A-Modul. Dann ist die Auswertungsabbildung $ev : \mathrm{Hom}_A(A, M) \to M$ mit $ev(f) := f(1_A)$ ein Isomorphismus von k-Vektorräumen. ev ist sogar ein Isomorphismus von A-Linksmoduln, wenn man $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ zu einem A-Linksmodul macht durch

$$af : b \mapsto f(ba), \text{ für } f \in \mathrm{Hom}_A(A, M), a, b \in A.$$

3.4 Korollar
Sei A eine k-Algebra, S ein einfacher A-Modul. Dann existiert ein surjektiver A-Modulhomomorphismus $\varphi : A \to S$.

3.5 Theorem (Schurs Lemma)
Sei A endlich-dimensionale K-Algebra, S und T einfache A-Moduln. Dann gilt:

$$\mathrm{Hom}_A(S, T) \neq 0 \Leftrightarrow S \simeq T.$$

$\mathrm{End}_A(S)$ ist ein Schiefkörper (der k enthält).

3.6 Lemma
Sei $f : A \to S$ ein surjektiver Homomorphismus von der Algebra A auf den einfachen A-Modul S. Dann ist $M := \mathrm{Ker}(f)$ ein maximales Linksideal von A. Umgekehrt sei $I \subset A$ ein maximales Linksideal. Dann ist $S := A/I$ ein einfacher A-Modul und die Restklassenabbildung $A \to A/I = S$ ist ein surjektiver A-Homomorphismus.

4. Radikale von Algebren und von Moduln

4.1 Definition
Sei A eine k-Algebra. Das (Jacobson-)Radikal von A ist der Schnitt aller maximalen Linksideale von A :

$$\mathrm{rad}A := \bigcap_{\substack{I \subset A \\ \text{maximales Linksideal}}} I$$

Beispiele:

(1) $A = k$, $\mathrm{rad}k = 0$.
(2) $A = \mathbb{Z}$. Die maximalen Linksideale sind $p\mathbb{Z}$ (p Primzahl). Daher ist das Radikal $\mathrm{rad}\mathbb{Z} = 0$.
(3) $A = k[x]$. Die maximalen Linksideale sind $(p(x))$ ($p(x)$ irreduzibles Polynom). Daher ist auch $\mathrm{rad}k[x] = 0$.
(4) $A = kQ$ für $Q = \cdot \xrightarrow{\alpha} \cdot$. Das Radikal $\mathrm{rad}A$ ist eindimensional mit Basis $\{\alpha\}$.

4.2 Proposition
Sei $J = \mathrm{rad} A$ das Jacobson-Radikal von $A, a \in A$. Dann sind äquivalent:
(1) $a \in J$

$$(2) \qquad a \in \bigcap_{\substack{R \subset A \\ \text{maximales Rechtsideal}}} R$$

(3) $\forall\, b \in A,\ \exists\, c \in A :\ (1-ab)c = c(1-ab) = 1$
(4) $\forall\, b \in A,\ \exists\, c \in A :\ (1-ab)c = 1$
(5) $\forall\, b \in A,\ \exists\, c \in A :\ (1-ba)c = c(1-ba) = 1$
(6) $\forall\, b \in A,\ \exists\, c \in A :\ c(1-ba) = 1$

4.3 Korollar
Das Radikal $J = \mathrm{rad} A$ ist ein zweiseitiges Ideal in A. Der Quotient $\overline{A} := A/J$ ist eine k-Algebra.

4.4 Korollar
(a) Für $\overline{A} = A/\mathrm{rad} A$, gilt: $\mathrm{rad}(\overline{A}) = 0$.
(b) Sei $I \trianglelefteq A$ ein zweiseitiges Ideal von A, I sei nilpotent (dh $\exists n \in \mathbb{N} : I^n = 0$). Dann gilt: $I \subset \mathrm{rad} A$.

Bemerkung: Sei I ein nilpotentes zweiseitiges Ideal. Dann ist jedes Element a in I nilpotent, denn $I^n = 0$ impliziert $a^n = 0$. Aber umgekehrt muss ein von einem nilpotenten Element a erzeugtes Ideal nicht nilpotent sein, und ein nilpotentes Element gehört nicht unbedingt zum Radikal. Zum Beispiel: A die Algebra der 2×2-Matrizen, und $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $a^2 = 0$. Das von a erzeugte zweiseitige Ideal ist A, und das Radikal $\mathrm{rad} A = 0$.

4.5 Definition
Sei M ein A-Linksmodul. Der Annullator $\mathrm{Ann}_A(M)$ von M ist

$$\mathrm{Ann}_A(M) := \{a \in A : am = 0\ \forall m \in M\}.$$

Das ist ein zweiseitiges Ideal von A.

Sei $I \subset A$ ein Linksideal. Dann gilt: $\mathrm{Ann}_A(A/I) \subset I$. Die Unkehrung gilt im Allgemein nicht.

4.6 Proposition
Sei $a \in A$. Dann gilt: $a \in \mathrm{rad} A \Leftrightarrow a \in \mathrm{Ann}_A(S)$ für alle einfachen A-Moduln S. Also gilt:

$$\mathrm{rad} A = \bigcap_{S \text{ einfach}} \mathrm{Ann}_A(S)$$

4.7 Definition
Sei M ein A-Linksmodul. Das Radikal $\mathrm{rad}(M)$ von M ist der Schnitt aller maximalen echten Teilmoduln von M :

$$\mathrm{rad} M := \bigcap_{\substack{N \subsetneq M \\ \text{maximaler Teilmodul}}} N$$

Die Teilmoduln des regulären A-Moduls A sind genau die Linksideale von A. Also ist das Radikal $\mathrm{rad} A$ der Algebra A gleich dem Radikal des regulären Moduls A.

4.8 Proposition
Sei M ein A-Linksmodul. Dann gilt:

$$\mathrm{rad} M = \bigcap_{\substack{p: M \to S \\ S \text{einfach}}} \mathrm{Ker}(p)$$

Bemerkung: Teilmoduln $\overline{X}$ des Quotienten M/N entsprechen den Teilmoduln X von M mit $N \subset X$.

Beispiele:

(1) $M = S$ einfach: $\mathrm{rad} S = 0$.
(2) $M = S_1 \oplus S_2$ mit S_1, S_2 einfach $\mathrm{rad} M = 0$.

4.9 Proposition
Sei M ein A-Linksmodul. Dann gilt: $\mathrm{rad} M = 0 \Leftrightarrow \exists$ einfache Moduln $S_1, \cdots, S_n$ (nicht notwendig verschieden) : $M \simeq S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$.
Insbesondere ist $\overline{A} = A/\mathrm{rad} A$ von dieser Form.

4.10 Korollar
Sei A endlich-dimensionale k-Algebra, $\overline{A} = A/\mathrm{rad} A$. Dann ist $\overline{A}$ ein halbeinfacher A-Modul. Jeder einfache A-Modul ist isomorph zu einem direkten Summanden von $\overline{A}$. Bis auf Isomorphie gibt es nur endlich viele einfache A-Moduln.

4.11 Definition
Ein Modul, der eine (endliche) direkte Summe von einfachen Moduln ist, heißt <u>halbeinfach</u>.

4.12 Lemma
Sei $f : X \to Y$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann gilt $f(\mathrm{rad} X) \subset \mathrm{rad} Y$.

Beispiel: $A = \mathrm{Mat}(n \times n, k) = \mathrm{End}_k(k^n)$, $\mathrm{rad} A = 0$, da A außer 0 und A keine zweiseitige Ideale hat. Andererseits gibt es viele nilpotente Matrizen in A.

4.13 Definition
Eine Algebra A heißt <u>einfach</u> (als Algebra), wenn A außer 0 und A selbst keine zweiseitige Ideale hat. Also, A einfach $\Longrightarrow \mathrm{rad} A = 0$.

Beispiel: $A = \mathrm{Mat}(n \times n, k)$.

Beispiel: $A = kQ$ endlich-dimensionale Wegealgebra. Dann hat $\mathrm{rad}A$ die Wege der Länge ≥ 1 als k-Basis, und jeder einfache A-Modul ist isomorph zu genau einem $S_i \cong ke_i$. Daraus folgt: $\mathrm{rad}kQ = 0 \iff Q_1 = 0 \iff kQ = \oplus_{i\in Q_0} ke_i \cong \oplus_{i\in Q_0} k$. Die Algebra kQ ist einfach $\iff$ der Köcher Q ist ein Punkt.

Beispiel: $A = k[x]/(x^n)$, $\mathrm{rad}A$ ist erzeugt von $\bar{x}$. Der Quotientalgebra $A/\mathrm{rad}A$ ist eindimensional, also einfach.

4.14 Lemma
Sei $f : X \to Y$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann gilt: $f(\mathrm{rad}X) \subset \mathrm{rad}Y$.

4.15 Lemma
Sei X ein A-Modul. Dann ist $X/\mathrm{rad}X$ halbeinfach.

4.16 Theorem (Nakayamas Lemma)
Seien X, Y und M jeweils $A-$Moduln.
(a) $f : X \to Y$ ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\overline{f} : X/\mathrm{rad}X \to Y/\mathrm{rad}Y$ ist surjektiv.
(b) Sei $\mathrm{rad}A \cdot M = M$. Dann ist $M = 0$.

4.17 Korollar
Sei A eine endlich-dimensionale Algebra. Dann gilt: $\mathrm{rad}A$ ist nilpotent, d.h. $\exists n \in \mathbb{N} : (\mathrm{rad}A)^n = 0$. Also ist $\mathrm{rad}A$ das eindeutige größte nilpotente Ideal in A.

4.18 Proposition
Sei M ein A-Linksmodul. Dann gilt: $\mathrm{rad}M = \mathrm{rad}A \cdot M$.

4.15 Korollar
(a) $X \subset Y \Rightarrow \mathrm{rad}X \subset \mathrm{rad}Y$
(b) $\exists n \in \mathbb{N} : (\mathrm{rad}A)^n = 0$, also auch $\mathrm{rad}(\mathrm{rad}(\cdots(\mathrm{rad}M))) = 0 \;\forall\, M$.

Beispiel: $A = kG$ mit $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\mathrm{Id}, g\}$, $g^2 = \mathrm{Id}$. Wenn $char(k) \neq 2$, $\mathrm{rad}A = 0$ und $A \cong k_{triv} \oplus k_{sign}$ ist halbeinfach. Wenn $char(k) = 2$, ist die triviale Darstellung gleich der Vorzeichendarstellung. Das Radikal $\mathrm{rad}A$ hat k-Basis $\mathrm{Id} + g$, und $A/\mathrm{rad}A$ ist eindimensional. Es gilt: $A \cong k[x]/(x^2)$, wobei x mit $\mathrm{Id} + g$ identifiziert wird.

§5. Halbeinfache Algebren

5.1 Definition
Eine Algebra B heißt <u>halbeinfach</u>: $\Leftrightarrow$ ${}_BB$ ist halbeinfach.

B halbeinfach $\Leftrightarrow \text{rad}B = 0$, also $B = \overline{B}$.

Beispiele:

(1) Alle $\overline{A} = A/\text{rad}A$ sind halbeinfach.
(2) $B = \text{Mat}(n \times n, k)$. Allgemeiner sind alle einfachen Algebren halbeinfach.
(3) Direkte Summen einfacher Algebren sind halbeinfach.
(4) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als $\mathbb{Q}$-Algebra ist einfach. Allgemeiner sind alle Körper einfach als Algebren über Unterkörpern.
(5) Die Wegealgebra $A = kQ$ ist halbeinfach genau dann, wenn die Menge der Pfeile, Q_1, leer ist.

5.2 Theorem (Satz von Maschke)
Sei G eine endliche Gruppe, k ein Körper der Charakteristik p mit $p = 0$ oder $p \nmid \text{ord}\ (G)$. Dann ist kG eine halbeinfache k-Algebra.

5.3 Theorem (Satz von Weierstrass und Dedekind)
Sei A eine kommutative halbeinfache k-Algebra. Dann gibt es Körpererweiterungen $k_1, \cdots, k_n$ von k, so dass $A \simeq k_1 \oplus \cdots \oplus k_n$ (als k-Algebra).

5.4 Theorem (Satz von Wedderburn und Artin)
Die endlich-dimensionalen halbeinfachen k-Algebren sind, bis auf Isomorphie, genau die Algebren von der Form

$$A \simeq \bigoplus_{i=1}^{l} \text{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$$

für natürliche Zahlen $l, n_1, \cdots, n_l$ und endlich-dimensionale Schiefkörper $D_i \supset k$. Diese Zerlegung von A ist eindeutig bis auf die Reihenfolge und Isomorphie der D_i; d.h. die Zahlen $l, n_1, \ldots, n_l$ und die Schiefkörper $D_1, \ldots, D_l$ sind durch A bestimmt. A hat bis auf Isomorphie genau die einfachen Moduln $S_1, \cdots, S_l$ mit

$$Si = \begin{pmatrix} D_i \\ \vdots \\ D_i \end{pmatrix}_{n_i}, \text{ wobei } \text{End}_A(S_i) = D_i^{op},\ \dim_{D_i} Si = n_i,\ \dim_k S_i = n_i \cdot [D_i : k].$$

5.5 Definition Sei A eine Algebra.
Ein Element $e \in A$ heißt Idempotent: $\Leftrightarrow e^2 = e$.
Idempotente e und f heißen orthogonal: $\Leftrightarrow ef = fe = 0$.
Ein Idempotent $e \neq 0$ heißt primitiv: $\Leftrightarrow$ e lässt sich nicht als Summe $e = \sum e_i$ mehrerer paarweise orthogonaler Idempotente $(\neq 0)$ schreiben.
Ein Idempotent e heißt zentral: $\Leftrightarrow e \in Z(A) = \{a \in A : ab = ba\ \forall b \in A\}$.
e heißt zentral-primitiv, falls es zentral ist und nicht in eine orthogonale Summe zentraler Idempotente zerlegt werden kann.

5.6 Proposition
Sei A eine Algebra. Die Zerlegungen von A in eine direkte Summe $A = \oplus_{i=1}^{l} A_i$ (A_i zweiseitige Ideale und selbst Algebren) entsprechen bijektiv den Zerlegungen des Einselements $1 = \sum_{i=1}^{l} e_i$ (mit e_i zentrale, paarweise orthogonale Idempotente).
Unzerlegbare Algebren A_i entsprechen dabei genau zentral-primitiven Elementen e_i.
Je zwei solche Zerlegungen haben eine gemeinsame Verfeinerung. Bei der eindeutigen feinsten Zerlegung sind alle e_i zentral-primitiv. Insbesondere gibt es genau eine Zerlegung $1 = \sum_i e_i$ in zentral-primitive Idempotente.

Beispiel: Für A halbeinfach $= \oplus_{i=1}^{l} \mathrm{Mat}(n_i \times n_i, D_i)$ ist das genau die Zerlegung in 5.4, die e_i sind die 1_{A_i}.

§6. Kompositionsreihen

Sei A eine k-Algebra, M ein A-Modul. Betrachte Ketten $0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n = M$ von Teilmoduln mit einfachen Faktoren M_{i+1}/M_i.

Beispiele:

(1) $M = S_1 \oplus S_2$ halbeinfach. Dann sind $0 \subset S_1 \subset M$ und $0 \subset S_2 \subset M$ verschiedene Ketten, aber mit denselben Faktoren, bis auf Anordnung und Isomorphie.

(2) $M = S \oplus S$ halbeinfach. Dieser Modul hat viele solche Ketten: $0 \subset S \oplus 0 \subset M$, $0 \subset 0 \oplus S \subset M$, $0 \subset (\lambda, \mu)S \subset M$, wobei $(\lambda, \mu) \in k \oplus k$ und $\neq (0, 0)$, $(\lambda, \mu)S = \{(\lambda s, \mu s) : s \in S\}$ ist ein Teilmodul von M und isomorph zu S.

(3) $A = k[x]/(x^n)$ und $M = A$. Dann ist $0 \subset (x^{n-1}) \subset (x^{n-2}) \subset \ldots \subset (x) \subset A$ eine Kette, deren Faktoren alle isomorph sind zu dem einzigen einfachen A-Modul $S = [x]/(x)$. Der halbeinfache Modul S^n hat natürlich auch eine Kette mit denselben Faktoren.

(4) $A = kQ$ Kronecker Algebra mit $Q = (\cdot \rightrightarrows \cdot)$. Alle darstellungen $M(\lambda) = k \rightrightarrows_{\lambda}^{1} k$ mit $\lambda \in k$ (unendlich viele, wenn k unendlich ist!) haben S_2 als Teilmodul mit Quotient S_1. Also haben all diese Moduln eine Kette $0 \subset S_2 \subset M(\lambda)$ mit denselben Faktoren S_2 und S_1.

Moduln sind also im Allgemeinen durch ihre einfachen Faktoren nicht bestimmt.

6.1 Definition
Sei M ein A-Modul. Eine endliche Kette von Teilmoduln

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$$

mit M_{i+1}/M_i einfach für $i = 0, \ldots, n-1$, heißt Kompositionsreihe oder Jordan-Hölder-Reihe von M. Die einfachen Moduln $S \simeq M_{i+1}/M_i$ heißen Kompositionsfaktoren von M. Die Multiplizität (oder Vielfachheit) von S ist die Anzahl der Indizes i mit $S \simeq M_{i+1}/M_i$. Die Summe $l(M)$ dieser Multiplizitäten heißt die (Komposition-)Länge von M.

Beispiel:

(1) $M = \bigoplus_{i=1}^n S_i^{l_i}$ halbeinfach. Dann hat S_i Vielfachheit l_i. Die Länge von M ist $l(M) = l_1 + \cdots + l_n$.

(2) $M = k[x]/(x^n)$. Dann ist $l(M) = n =$ die Vielfachheit von $S = k[x]/(x)$.

6.2 Theorem (Satz von Jordan und Hölder)
Seien $0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M$ und $0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_l = M$ Kompositionsreihen von M. Dann gilt $n = l$ und die Kompositionsfaktoren und deren Vielfachheiten stimmen (bis auf Anordnung und Isomorphie) überein.

Bezeichnung: Die Multiplizität des einfachen Moduls S in einer Kompositionsreihe von M wird mit $[M : S]$ bezeichnet.

Bemerkung: Theorem 6.2 gilt nicht für unendlich-dimensionale Moduln. Zum Beispiel: $A = k[x]$ und $M = A$. Für jedes $\lambda \in k$, hat M eine Kompositionsreihe

$$A = (1) \supset (x - \lambda) \supset ((x - \lambda)^2) \supset ((x - \lambda)^3) \supset \dots$$

wobei der einfache A-Modul $S_\lambda = k[x]/(x - \lambda)$ unendlich oft als Faktor vorkommt, und es sonst keine einfachen Faktoren gibt. Wenn $\lambda \neq \mu$, dann gilt $S_\lambda \ncong S_\mu$. Also gibt es keine Eindeutigkeit der Vielfachheit.

§7. Zerlegungen und projektive Moduln

7.1 Proposition
Die Zerlegungen des regulären Moduls $A = \oplus_i P_i$ von Linksmoduln entsprechen bijektiv den Zerlegungen $1_A = \oplus_i e_i$ in paarweise orthogonale Idempotente. Dabei gilt $P_i = Ae_i = \mathrm{Im}(e_i)$. Unzerlegbare Moduln entsprechen primitiven Idempotenten.

7.2 Theorem
Sei M ein A-Modul und $E := \mathrm{Hom}_A(M, M)$ sein Endomorphismenring. Dann existiert eine bijektive Zuordnung $\{M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, Zerlegung in direkte Summanden$\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\{1_E = e_1 + \cdots + e_n$, Zerlegung in paarweise orthogonale Idempotente$\}$. Unzerlegbare Summanden M_i entsprechen primitiven Idempotenten $e_i = 1_{M_i}$. M ist unzerlegbar $\Leftrightarrow$ 0 und 1 sind die einzigen Idempotente in $E \Leftrightarrow 1_E$ ist ein primitives Idempotent.

7.3 Lemma
Sei I ein nilpotentes Ideal in A, $u \in A$ mit $u^2 - u \in I$, d.h. $\overline{u}^2 = \overline{u} \in A/I$. Dann existiert $e = e^2 \in A$ mit $u - e \in I$, d.h. $\overline{u} = \overline{e}$ in A/I. Insbesondere gibt es für jedes Idempotent $f \in A/\mathrm{rad}(A)$ ein Idempotent $e \in A$ mit $\overline{e} = f$.
(Idempotente in $\overline{A}$ lassen sich zu Idempotenten in A hochheben.)

7.4 Definition
Ein A-Modul P heisst projektiv: $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : P$ ist isomorph zu einem direkten Summanden von $A^n = \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n}$.

(vgl. M halbeinfach ist $\iff$ M ist isomorph zu einem direkten Summanden von $\overline{A}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.)

Beispiele:

(1) Der reguläre Modul A ist immer projektiv.

(2) Sei $e = e^2 \in A$. Dann ist $1_A = e + (1-e)$ und $A = A_e \oplus A(1-e)$. Also ist Ae projektiv.

(3) Sei $A = kQ^{\text{op}}$. Dann ist $1_A = \oplus_{i \in Q_0} e_i$ und $A = \oplus_{i \in Q_0} Ae_i$. $P_i = Ae_i$ ist projektiv und hat Basis $\{$alle Wege, die in i beginnen$\}$.

7.5 Proposition
(a) Sei P projektiv, $f : M \to N$ ein surjektiver A-Modulhomomorphismus und $g : P \to N$ irgendein A-Modulhomomorphismus. Dann existiert $h \in \operatorname{Hom}_A(P, M)$ mit $g = f \circ h$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(b) Sei P ein A-Modul, so dass gilt: $\forall\ M, N,\ \forall\ f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, f surjektiv, $\forall\ g \in \operatorname{Hom}_A(P, N)$, $\exists\ h \in \operatorname{Hom}_A(P, M)$ mit $g = f \circ h$. Dann ist P projektiv.

Also charakterisiert die Liftungseigenschaft die projektiven Moduln.

Beispiel: Sei $A = kQ^{\text{op}}$ mit $Q = 1 \xrightarrow{\alpha} 2$. Mit dieser Charakterisierung kann man nachprüfen, dass der einfache Modul $S_2 = 0 \to k$ projektiv ist, und dass $S_1 = k \to 0$ nicht projektiv ist, da ein surjektiver A-Modulhomomorphismus $(k \xrightarrow{\text{Id}} k) \to S_1$ existiert, aber Id_{S_1} nicht hochgehoben werden kann.

7.6 Theorem
(a) Für projektive A-Moduln P und Q gilt:
$$P \simeq Q \Leftrightarrow \overline{P} := P/\operatorname{rad}P \simeq Q/\operatorname{rad}Q =: \overline{Q}.$$
(b) Die Abbildung $P \mapsto P/\operatorname{rad}P$ definiert eine Bijektion
$$\{\text{projektive } A\text{-Moduln}\}/_{\simeq} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{\text{halbeinfache } A\text{-Moduln}\}/_{\simeq}$$
Dabei entsprechen unzerlegbare projektive Moduln den einfachen Moduln. Es gibt also eine Bijektion zwischen Isomorphieklassen unzerlegbarer projektiver Moduln und Isomorphieklassen einfacher Moduln.
(c) Seien $P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_l$ zwei Zerlegungen von P projektiv in unzerlegbare Moduln. Dann gilt: $n = l$ und $P_i \simeq Q_i$ (bis auf Anordnung).

7.7 Korollar
Seien $1 = e_1 + \ldots + e_n = f_1 + \ldots + f_l$ Zerlegungen von 1_A in paarweise orthogonale primitive Idempotente. Dann gilt $n = l$ und es gibt ein invertierbares Element $a \in A$, so dass

nach Umordnung gilt: $f_i = a^{-1}e_i a$ für alle i.

7.8 Theorem (Satz von Krull, Remak und Schmidt)
Seien $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n = N_1 \oplus \ldots \oplus N_l$ zwei Zerlegungen in direkte Summen unzerlegbarer Moduln. Dann gilt $n = l$ und, nach Umordnung, $M_i \simeq N_i$.

§8. Darstellungen von Köchern und quadratische Formen

8.1 Definition
Eine Algebra A hat endlichen Darstellungstyp (ist darstellungsendlich), wenn es bis auf Isomorphie nur endlich viele unzerlegbare A-Moduln gibt.

Beispiel: Die Wegealgebren der Köcher $Q = \cdot$, $Q = \cdot \to \cdot$, $Q = \cdot \to \cdot \to \cdot$ und $Q' = \cdot \to \cdot \leftarrow \cdot$ sind darstellungsendlich.

8.2 Definition
Sei $(V_i, \varphi_\alpha)_{i\in Q_0,\ \alpha\in Q_1}$ eine Darstellung eines Köchers Q über k. Der Dimensionsvektor $\underline{\dim}V$ ist der Vektor $(\dim_k V_i)_{i\in Q_0}$.

Bemerkung: Im Allgemeinen sind die Darstellungen durch ihre Dimensionsvektoren nicht bestimmt. Beispiel: Der Kronecker-Köcher $Q = \cdot \rightrightarrows \cdot$ hat unzerlegbare Darstellungen $M(\lambda) = k \rightrightarrows^1_\lambda k$ ($\lambda \in k$). When $\lambda \neq \mu$ ist, ist $M(\lambda)$ nicht isomorph zu $M(\mu)$. Aber sie haben denselben Dimensionsvektor $(1, 1)$.

8.3 Lemma
Sei $\dim kQ < \infty$, $V = (V_i, \varphi_\alpha)$ eine Darstellung von kQ. Dann gilt $\underline{\dim}\ V = ([V : S_i])_{i\in Q_0}$, d.h. die Einträge des Dimensionsvektors sind die Kompositionsmultiplizitäten der einfachen Moduln S_i in V.

8.4 Definition
Sei Q ein nicht orientierter Graph mit $|Q_0| = n$. Für $i, j \in Q_0$ sei $d_{ij} = d_{ji} := \sharp\{$ Kanten $i - j\}$, und $(-,-) : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die symmetrische Bilinearform mit

$$(e_i, e_j) := \begin{cases} -d_{ij}, & \text{für } i \neq j \\ 2 - 2d_{ii}, & \text{für } i = j \end{cases}$$

(wobei $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$) und $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die quadratische Form mit

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i\leq j} d_{ij}x_i x_j$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Beispiel: $Q = 1-2-3$. Dann ist $q(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$. Die symmetrische Bibliearform $(-,-)$ ist positiv definit, und

$$\underline{\dim}\, V = (100), (010), (001), (x110), (011), (111)$$

für V unzerlegbar, sind die Lösungen der Gleichung $q(x) = 1$, $x \in \mathbb{N}^3$.

8.5 Lemma
Für $x, y \in \mathbb{Z}^n$ mit $n = |Q_0|$, gilt: $q(x) = \frac{1}{2}(x, x)$ und $(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$.

Die Bilinearform $(-,-)$ bestimmt also die quadratische Form q und umgekehrt.

8.6 Definition
Die Menge der Wurzeln von Q ist

$$\Delta := \{x \in \mathbb{Z}^n | q(x) \leq 1\}$$

Ein Vektor x heißt positive Wurzel, falls $x \in \Delta$ und $x_i \geq 0$ $(\forall\, i)$, und $x \neq 0$ (d.h. es existiert i mit $x_i \neq 0$).

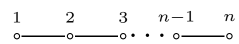
8.7 Definition
Sei $q : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ eine quadratische Form mit Bilinearform $(-,-)$.
(a) Das Radikal von q ist $\mathrm{rad}_q := \{x \in \mathbb{Z}^n : (x, -) = 0$, d.h. $(x, y) = 0,\ \forall\, y \in \mathbb{Z}^n\}$.
(b) q heißt positiv definit $:\Leftrightarrow q(x) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$.
(c) q heißt positiv-semidefinit $:\Leftrightarrow q(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}^n$.
(d) Ein Vektor $x \in \mathbb{Z}^n$ heißt aufrichtig: $\Leftrightarrow x_i \neq 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n$.

Beispiel: Sei $Q = 1 - 2 - \ldots - (n-1) - n$. Dann ist $q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1-x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_2-x_3)^2 + \ldots + \frac{1}{2}(x_{n-1}-x_n)^2 + \frac{1}{2}x_n^2 \geq 0$, und $q(x) = 0 \iff x = 0$. Also q ist positiv definit.

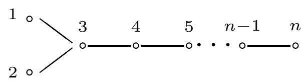
Wir nennen Q zusammenhängend, wenn es für alle $i, j \in Q_0$ eine Folge von Kanten zwischen i und j gibt.

8.8 Theorem
Für einen zusammenhängenden Graphen Q mit quadratischer Form q gilt:
(a) q positiv definit $\Leftrightarrow$ Q ist ein Dynkindiagramm, das heißt von der Form A_n, D_n, E_6, E_7 oder E_8 :

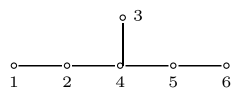
A_n

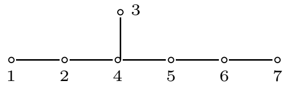


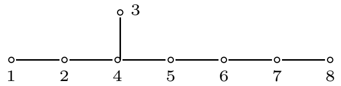
D_n



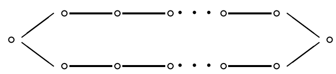
E_6

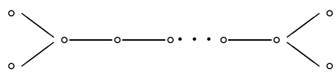


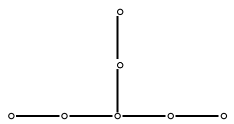
E_7 

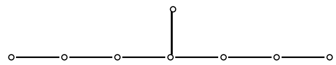
E_8 

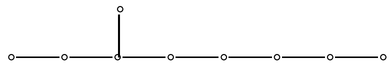
(b) q positiv semi-definit $\Leftrightarrow$ q Dynkin oder Euklidisch (= erweitert Dynkin = affin), das heißt:

$\widetilde{A}_n$ 

$\widetilde{D}_n$ 

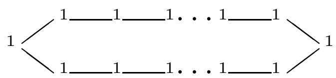
$\widetilde{E}_6$ 

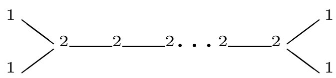
$\widetilde{E}_7$ 

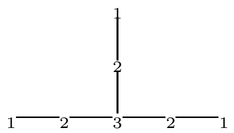
$\widetilde{E}_8$ 

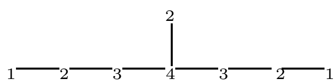
(jeweils $n+1$ Punkte, einer mehr als das entsprechende Dynkindiagramm)

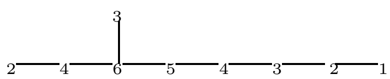
In diesem Fall gilt jeweils: $\exists\ \delta \in \mathbb{Z}^n$, δ positiv, mit $\mathrm{rad}_q = \mathbb{Z}\delta$.

$\widetilde{A}_n$ 

$\widetilde{D}_n$ 

$\widetilde{E}_6$ 

$\widetilde{E}_7$ 

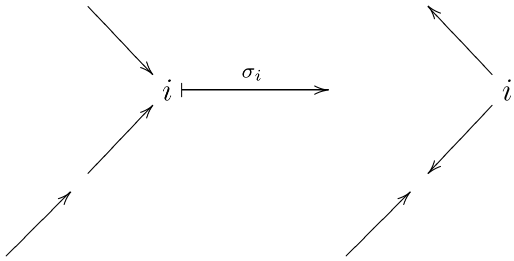
$\widetilde{E}_8$ 

§9 Spiegelungsfunktoren

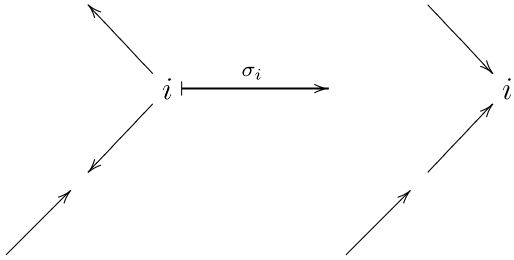
9.1 Definition

Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher, $i \in Q_0$ heißt Quelle, wenn an i kein Pfeil endet, und Senke, wenn an i

kein Pfeil beginnt. Sei i eine Quelle oder eine Senke, dann ist $\sigma_i\overrightarrow{Q}$ der Köcher, der aus $\overrightarrow{Q}$ entsteht durch Umdrehen aller Pfeile an i.



bzw.



σ_i heißt Spiegelung an i.

9.2 Definition
Eine Anordnung $i_1, \cdots, i_n$ von Q_0 heisst zulässig, wenn für jedes j gilt: i_j ist eine Senke in $\sigma_{i_{j-1}} \ldots \sigma_{i_1}\overrightarrow{Q}$.

9.3 Lemma

(1) Sei $i_1, \ldots, i_n$ eine zulässige Anordnung. Dann ist $\sigma_{i_n} \ldots \sigma_{i_1}(\overrightarrow{Q}) = \overrightarrow{Q}$.
(2) Eine zulässige Anordnung für $\overrightarrow{Q}$ existiert genau dann, wenn $\overrightarrow{Q}$ keinen orientierten Zyklus enthält (d.h. genau für $\dim k\overrightarrow{Q} < \infty$).

9.4 Definition
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher und $i \in Q_0$ eine Senke. Der Spiegelungsfunktor

$$S_i^+ : k\overrightarrow{Q}\text{-rep} \to k\sigma_i\overrightarrow{Q}\text{-rep}$$

ist eine Zuordnung $X \mapsto S_i^+X$ von $\overrightarrow{Q}$-Darstellungen auf $\sigma_i\overrightarrow{Q}$-Darstellungen und eine Zuordnung $f \mapsto S_i^+f$ von Modulhomomorphismen in der folgenden Weise:

Sei $X \in K\overrightarrow{Q}$-rep, dann ist $Y := S_i^+X$ die $k\sigma_i\overrightarrow{Q}$-Darstellung mit

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \neq i \\ \mathrm{Ker}(\bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{X_\alpha} X_i) & \text{für } j = i \end{cases}$$

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{für } t(\alpha) \neq i \\ Y_i \xrightarrow{inkl} \bigoplus_{\substack{\beta \in Q_1 \\ t(\beta)=i}} X_{s(\beta)} \xrightarrow{proj} X_{s(\alpha)} & \text{für } t(\alpha) = i \end{cases}$$

Sei $f : X \mapsto X'$ ein Homomorphismus von $\overrightarrow{Q}$-Darstellungen. Dann ist $g = S_i^+ f : S_i^+ X \to S_i^+ X'$ definiert durch

$$g_j = \begin{cases} f_j & \text{für } j \neq i \\ Y_i \to \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{(f_{s(\alpha)})} \bigoplus_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ t(\alpha)=i}} X'_{s(\alpha)} & \text{für } j = i \end{cases}$$

Beispiel: Sei $\overrightarrow{Q} = 2 \to 1$. Dann ist 1 eine Senke mit $\sigma_1 \overrightarrow{Q} = 2 \leftarrow 1$. Die unzerlegbaren $k\overrightarrow{Q}$-Darstellungen $0 \to k$, $k \xrightarrow{1} k$ und $0 \to k$ werden durch den Spiegelungsfunktor S_1^+ auf $k\sigma_1\overrightarrow{Q}$-Darstellungen $0 \leftarrow 0$, $k \leftarrow 0$ und $k \xleftarrow{1} k$ geschickt.

Beispiel: Sei

$$\overrightarrow{Q} = \begin{tikzcd} 2 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\ & 1 & \\ 5 \arrow[ur] & & 4 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

mit 1 eine Senke. Die $k\overrightarrow{Q}$-Darstellung

$$\begin{tikzcd} k \arrow[dr, "\binom{1}{0}"] & & k \arrow[dl, "\binom{\lambda}{\mu}"'] \\ & k^2 & \\ k \arrow[ur, "\binom{0}{1}"'] & & k \arrow[ul, "\binom{1}{1}"] \end{tikzcd}$$

wird durch den Spiegelungsfunktor S_1^+ auf die $k\sigma_1\overrightarrow{Q}$-Darstellung

$$\begin{tikzcd} k & & k \\ & k^2 \arrow[ul, "\binom{-1}{-\lambda}"'] \arrow[ur, "\binom{0}{1}"] \arrow[dl, "\binom{-1}{-\mu}"] \arrow[dr, "\binom{1}{0}"'] & \\ k & & k \end{tikzcd}$$

geschickt. Insbesondere haben sowohl $\overrightarrow{Q}$ als auch $\sigma_1\overrightarrow{Q}$ unendlich viele paarweise nichtisomorphe unzerlegbare Darstellungen.

9.5 Definition
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher und $i \in Q_0$ eine Quelle. Der Spiegelungsfunktor

$$S_i^- : k\overrightarrow{Q}\text{-rep} \to k(\sigma_i \overrightarrow{Q})\text{-rep}$$

ist eine Zuordnung $X \mapsto S_i^- X$ von Darstellungen und $f \mapsto S_i^- f$ von Homomorphismen: Sei $X \in k\overrightarrow{Q}$-rep, dann ist $Y := S_i^- X$ die $k\sigma_i \overrightarrow{Q}$-Darstellung mit

$$Y_j = \begin{cases} X_j & \text{für } j \neq i \\ \operatorname{Coker}(X_i \xrightarrow{(X_\alpha)} \bigoplus_{\alpha \in Q_1, s(\alpha)=i} X_{t(\alpha)}) & \text{für } j = i \end{cases}$$

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_\alpha & \text{für } s(\alpha) \neq i \\ Y_{t(\alpha)} = X_{t(\alpha)} \xrightarrow{\text{Einschränkung der Proj.}} Y_i & \text{für } s(\alpha) = i \end{cases}$$

Sei $f : X \to X'$ ein Homomorphismus in $k\overrightarrow{Q}$-rep, dann ist $g := S_i^- f$ definiert durch:

$$g_j = f_j \qquad \text{für } j \neq i$$

und falls $i = j$ so, dass das folgende Diagram kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r] \arrow[d, "f_i"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \bigoplus X_{t(\alpha)} \arrow[r] \arrow[d, "(f_j)"] & Y_i \arrow[d, "g_i"] \\ X_i' \arrow[r] & \bigoplus X'_{t(\alpha)} \arrow[r] & Y_i{}' \end{tikzcd}$$

9.6 Theorem
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher (ohne Schleifen und orientierte Zyklen), $i \in Q_0$ eine Quelle oder Senke, k ein Körper. Dann definieren S_i^+ und S_i^- zueinander inverse Bijektionen: $\{$unzerlegbare Darstellungen von $\overrightarrow{Q}$ über k, die nicht zu $S(i)$ isomorph sind$\}/\simeq\ \leftrightarrow \{$unzerlegbare Darstellungen von $\sigma_i \overrightarrow{Q}$ über k, die nicht zu $S(i)$ isomorph sind$\}/\simeq$.
Für $X \neq S(i)$ unzerlegbar gilt: $\underline{\dim} S_i^{\pm} X = \sigma_i(\underline{\dim} X)$.

Insbesondere haben die Köcher $\overrightarrow{Q}$ und $\sigma_i \overrightarrow{Q}$ dieselbe "Anzahl" von unzerlegbaren Darstellungen über k, also auch denselben Darstellungstyp.

Dabei ist die "Spiegelung" σ_i auf Dimensionsvektoren in $\mathbb{Z}^n$ definiert durch
$\sigma_i : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ mit $x \mapsto x - \frac{2(x,e_i)}{(e_i,e_i)} e_i$
(e_i Einheitsvektor, $(-,-)$ obige Bilinearform, $(e_i, e_i) = 2 - 2d_{ii} = 2$, da keine Schleifen).

Beispiel: Sei $\overrightarrow{Q} = 2 \to 1$. Dann schickt $\sigma_1 : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ die Vektoren $e_1 = (0,1)$, $e_2 = (1,0)$ und $(1,1)$ nach $-e_1$, $(1,1)$ und $(1,0)$. Also stimmt das mit S_i^+ überein (vgl. Beispiel nach 9.4).

9.7 Lemma
(a) Die Funktoren S_i^+ und S_i^- erfüllen: $S_i^{\pm}(\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, $S_i^{\pm}(f \circ g) = S_i^{\pm}(f) \circ S_i^{\pm}(g)$ und $S_i^{\pm}(X \oplus Y) \simeq S_i^{\pm}(X) \oplus S_i^{\pm}(Y)$.

(b) Sei i eine Senke. Dann existiert ein Modulhomomorphismus ('Vergleichshomomorphismus') $\iota_i(X) : S_i^- S_i^+ \to X$ mit

$$(\iota_i X)_j = \begin{cases} \mathrm{Id}_{X_j} & \text{für } j \neq i \\ (S_i^- S_i^+ X)_i \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} \xrightarrow{\varphi} X_i) \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha\in(\sigma_i Q)_1\\ s(\alpha)=i}} X_{t(\alpha)}) \\ \qquad \simeq \mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow X_i & \text{für } j = i \end{cases}$$

Dabei ist $\mathrm{Coker}(\iota_i(x))$ halbeinfach, genauer: eine direkte Summe von Kopien des einfachen Moduls $S(i)$.

(c) Sei i eine Quelle. Dann existiert ein Modulhomomorphismus ('Vergleichshomomorphismus') $\pi_i(X) : X \to S_i^+ S_i^- X$ mit

$$(\pi_i X)_j = \begin{cases} \mathrm{Id}_{X_j} & \text{für } j \neq i \\ X_i \to \mathrm{Im}(\psi) \simeq \mathrm{Ker}(\bigoplus_{\substack{\alpha\in(\sigma_i Q)_1\\ t(\alpha)=i}} \to \mathrm{Coker}(X_i \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ s(\alpha)=i}} X_{s(\alpha)} X_{t(\alpha)})) \\ \qquad \simeq (S_i^+ S_i^- X)_i & \text{für } j = i \end{cases}$$

Dabei ist $\mathrm{Ker}(\pi_i X)$ halbeinfach, genauer: eine direkte Summe von Kopien des einfachen Moduls $S(i)$.

9.8 Lemma
Sei X eine Darstellung von $k\overrightarrow{Q}$.
(a) Sei $i \in Q_0$ eine Senke. Dann gilt $X \simeq S_i^- S_i^+ X \oplus \mathrm{Coker}(\iota_i X)$. Falls $\mathrm{Coker}(\iota_i X) = 0$ gilt, dann ist $\underline{\dim} S_i^+ X = \sigma_i(\underline{\dim} X)$.

(b) Sei $i \in Q_0$ eine Quelle. Dann gilt $X = S_i^+ S_i^- X \oplus \mathrm{Ker}(\pi_i X)$. Falls $\mathrm{Ker}(\pi_i X) = 0$ gilt, dann ist $\underline{\dim} S_i^- X = \sigma_i(\underline{\dim} X)$.

9.9 Lemma
Sei $i \in Q_0$ eine Senke, X eine unzerlegbare Darstellung von $\overrightarrow{Q}$, dann sind die folgenden Ausagen äquivalent:

(1) $X \neq S(i)$
(2) $S_i^+ X$ unzerlegbar (also $\neq 0$)
(3) $S_i^+ X \neq 0$
(4) $S_i^- S_i^+ X \simeq X$
(5) $\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=i}} \xrightarrow{\varphi} X_i$ ist surjektiv
(6) $\sigma_i(\underline{\dim} X) > 0$
(7) $\underline{\dim} S_i^+ X = \sigma_i(\underline{\dim} X)$

Analoge Äquivalenzen gelten für i Quelle.

9.10 Korollar:
Seien $A = k\overrightarrow{Q}_1$ und $B = k\overrightarrow{Q}_2$ endlich-dimensionale Wegealgebren mit demselben unorientierten Graphen $Q_1 = Q_2$. Dann haben A und B denselben Darstellungstyp.

Es gibt sogar eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen der unzerlegbaren Darstellungen.

§10 Der Satz von Gabriel

Sei Q ein Diagramm. Dazu sind definiert eine Bilinearform $(-,-) : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ mit $n = |Q_0|$, und eine quadratische Form $q(x)$ (§8). Die Wurzeln von Q sind die Elemente von $\Delta := \{x \in \mathbb{Z}^n : q(x) \leq 1\}$. Ein Wurzel $x = (x_i)$ heißt positiv, wenn $x_i \geq 0$ for all i und $x \neq 0$.

10.1 Satz (Satz von Gabriel, 1972)
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein zusammenhängender Köcher mit Graph Q. Dann gilt:

(1) $k\overrightarrow{Q}$ hat endlichen Darstellungstyp $\iff$ Q ist ein Dynkin-Diagramm.

(2) Sei Q ein Dynkin-Diagramm. Dann liefert die Zuordnung $X \mapsto \underline{\dim} X$ eine Bijektion $\{$ unzerlegbare $k\overrightarrow{Q}$-Darstellungen $\}$ / $\simeq$ $\leftrightarrow$ $\{$positive Wurzeln von $q\}$ / $\simeq$.

Insbesondere hängt diese kombinatiorische Beschreibung nicht vom Grundkörper k ab und auch nicht von der Orientierung von $\overrightarrow{Q}$. Unzerlegbare Darestellungen sind durch ihre Dimensionvektoren eindeutig bis auf Isomorphie bestimmt.

10.2 Proposition
Sei Q Dynkin oder Euklidisch. Dann gilt:

(1) Die Einheitsvektoren e_i sind Wurzeln.

(2) $x \in \Delta, y \in \mathrm{rad}_q \Rightarrow -x, x+y \in \Delta$.

(3) $x \in \Delta \Rightarrow x > 0$ oder $x < 0$.

(4) Q Euklidisch $\Rightarrow \exists \Delta_0 \subset \Delta$, Δ_0 endlich, so daß gilt: $x \in \Delta \Rightarrow x = x_0 + y_0$, $x_0 \in \Delta_0$, $y_0 \in \mathrm{rad}_q$ (d.h. $\Delta = \Delta_0 + \mathrm{rad}_q$ für eine endliche Menge Δ_0).

(5) Q Dynkin $\Rightarrow \Delta$ endlich.

10.3 Lemma

(1) $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}^n$: $(x, y) = (\sigma_i(x), \sigma_i(y))$.

(2) $\forall\, x \in \mathbb{Z}^n$: $q(x) = q(\sigma_i(x))$.

(3) x ist eine Wurzel $\Rightarrow \sigma_i(x)$ ist auch eine Wurzel.

10.4 Korollar
Sei Q Dynkin oder Euklidisches Diagramm, sei x eine positive Wurzel, so daß $\sigma_i(x)$ nicht positiv ist. Dann ist $x = e_i$.

10.5 Definition
Sei $\overrightarrow{Q}$ ein Köcher ohne Schleifen und orientierte Zyklen und $i_1, \cdots, i_n$ eine zulässige Anordnung von Q_0. Die Coxeterfunktoren (bezüglich dieser Anordnung) sind

$$C^+ = S^+_{i_n} \circ \ldots \circ S^+_{i_1} : k\overrightarrow{Q}\text{-rep} \to k\overrightarrow{Q}\text{-rep}$$

und

$$C^- = S^-_{i_1} \circ \ldots \circ S^-_{i_n} : k\overrightarrow{Q}\text{-rep} \to k\overrightarrow{Q}\text{-rep}.$$

Die Abbildung $c : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ mit $c(x) = \sigma_{i_n} \circ \ldots \circ \sigma_{i_1}(x)$ heißt Coxetertransformation.

Notation: für $r \in \mathbb{Z}$ ist

$$C^r := \begin{cases} (C^+)^r & \text{für } r > 0 \\ \mathrm{Id} & \text{für } r = 0 \\ (C^-)^r & \text{für } r < 0 \end{cases}$$

10.6 Lemma
Die Funktoren C^+ und C^- hängen nicht von der Wahl der zulässigen Anordnung ab.

10.7 Proposition
Sei $1, \ldots, n$ eine zulässige Anordnung. Dann gilt

(1) $\forall i : \underline{\dim} P(i) = \sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}(e_i)$.

(2) $\forall i : P(i) \simeq S^-_1 \ldots S^-_{i-1}(S(i))$, wobei $S(i)$ Darstellung von $\sigma_i \ldots \sigma_n \overrightarrow{Q}$ ist.

(3) Sei X unzerlegbar. Dann gilt: $C^+X = 0 \Leftrightarrow X \simeq P(i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sei A eine k-Algebra, und M ein A-Linksmodul. Der duale Vektorraum $M^* :=\mathrm{Hom}_k(M, k)$ ist ein A-Rechtsmodul durch $(\varphi a)(m) := \varphi(am)$, für $\varphi \in M^*$, $a \in A$ und $m \in M$. Ist $f : M \to N$ ein A-Homomorphismus zwischen A-Linksmoduln, dann ist $f^{\mathrm{tr}} : N^* \to M^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$, ein A-Homomorphismus zwischen A-Rechtsmoduln. Wenn M endliche Dimension hat, ist M isomorph zu M^{**}.

10.8 Definition
Ein A-Linksmodul I heißt injektiv: $\Longleftrightarrow$ $\forall\, M, N \in A$-mod, $\forall\, f : 0 \to M \to N$, $\forall\, g : M \to I$, $\exists\, h : N \to I$ mit $g = h \circ f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

10.9 Lemma
Ein A-Linksmodul I ist injektiv genau dann, wenn $I = P^*$ für einen projektiven A-Rechtsmodul P.

Insbesondere hat A bis auf Isomorphie genau $n = |Q_0|$ unzerlegbare injektive Moduln. Für $i \in Q_0$ hat der injektive Modul $I(i) = (e_i A)^*$ als Basis alle Wege, die bei i enden. Wenn i eine Quelle ist, ist $I(i)$ gerade der einfache Moduln $S(i)$.

10.10 Proposition
Sei $1, \ldots, n$ eine zulässige Anordnung. Dann gilt:

(1) $\underline{\dim} I(i) = \sigma_n \ldots \sigma_{i+1}(e_i)$.
(2) $I(i) \simeq S_n^+ \ldots S_{i+1}^+(S(i))$ wobei $S(i)$ Darstellung von $\sigma_i \ldots \sigma_1 \overrightarrow{Q}$.
(3) Sei X unzerlegbar. Dann $C^- X = 0 \Leftrightarrow \exists\, i : X \simeq I(i)$.

10.11 Proposition

(1) Für jedes $i \in Q_0$ gilt: $c(\underline{\dim} P(i)) = -\underline{\dim} I(i)$.
(2) $\{\underline{\dim} P(i) : i \in Q_0\}$ und $\{\underline{\dim} I(i) : i \in Q_0\}$ sind zwei Basen von $\mathbb{Z}^n$; c ist also durch (a) festgelegt.
(3) Für $x, y \in \mathbb{Z}^n$ gilt: $< \underline{\dim} P(i), x >= x_i =< x, \underline{\dim} I(i) > \forall\, i \in Q_0$ und $< x, y >= - < y, c(x) >=< c(x), c(y) >$ für die Eulerform $< -, - >$ von $\overrightarrow{Q}$ mit
$$< -, - >: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}, < x, y >:= \sum_{i \in Q_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in Q_1} x_{s(\alpha)} y_{t(\alpha)}.$$
(4) Für $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt: $c(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathrm{rad} q$.
(5) Für Q Dynkindiagramm, $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt: $\exists r \geq 0$ so, daß $c^r(x)$ nicht positiv ist.

§11 Äquivalenzen von Modulkategorien

Frage: Wann haben Algebren A und B dieselbe Dartellungstheorie?
Zwei Beispiele: $A \cong B$ als Algebren; $A = k$ und $B = \mathrm{Mat}(n \times n, k)$.

11.1 Definition
Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist gegeben durch die folgenden Daten: Eine Klasse Ob$\mathcal{C}$ von Objekten von $\mathcal{C}$, eine Klasse Mor$\mathcal{C}$ von Morphismen von $\mathcal{C}$, wobei jeder Morphismus f zu zwei Objekten X und Y gehört, $f \in \mathrm{Mor}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, so daß zu $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ eindeutig ein Morphismus $h : X \to Z$ zugeordnet ist (die Komposition, das Produkt $g \circ f$). Die Komposition ist assoziativ: $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$. Zu jedem Objekt X gibt es einen Morphism $1_X : X \to X$, so daß gilt: $1_X \circ f = f, \forall\, f : Y \to X$ und $g = g \circ 1_X, \forall\, g : X \to Y$.

Bemerkungen:

(1) Ob$\mathcal{C}$ und Mor$\mathcal{C}$ müssen keine Mengen sein.
(2) Die Morphismen müssen keine Abbildungen sein.
(3) 1_X ist eindeutig: sei $1'_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ mit derselben Eigenschaft. Dann gilt $1_X = 1_X \circ 1'_X = 1'_X$. 1_X heißt Identität auf X.
(4) Es muss kein Nullobjekt O existieren.

Beispiele:

(1) Die leere Kategorie $\mathcal{C} = \emptyset$ mit $\mathrm{Ob}\mathcal{C} = \emptyset$ und $\mathrm{Mor}\mathcal{C} = \emptyset$.
(2) Die Kategorie $\mathcal{C}$ = Sets aller Mengen: Objekte sind Mengen ($\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ ist keine Menge!), Morphismen sind Abbildungen zwischen Mengen, Komposition ist die normale Komposition von Abbildungen und 1_X ist die identische Abbildung.
(3) Die Kategorie $\mathcal{C} = k$-Vect aller k-Vektorräume (k ein fester Körper): Objekte sind k-Vektorräume, und Morphismen sind k-lineare Abbildungen.
(4) Die Kategorie aller Gruppen: Objekte sind Gruppen, und Morphismen sind Gruppenhomomorphismen. Hier gibt es kein Nullobjekt.
(5) Sei G eine Gruppe. Definiere eine Kategorie $\mathcal{C}_G$ mit einem Objekt $\{G\}$, und $\mathrm{Mor}\mathcal{C} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\{G\}, \{G\}) = G$. Für $g, h \in G$ wird die Komposition $g \circ h \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ durch die Multiplikation $gh \in G$ definiert. Die Identiät ist $1_{\{G\}} = e$, das Einselement von G. In diesem Beispiel sind Morphismen keine Abbildungen von Mengen, andererseits ist alle Information über G in $\mathrm{Mor}\mathcal{C}$ enthalten, so daß G und H sich unterscheiden können.
(6) Sei A eine K-Algebra. Die Kategorie A-mod hat als Objekte alle endlich-dimensionalen A-Moduln, und als Morphismen A-Modulhomomorphismen. (ObA-mod ist keine Menge.)
(7) Die Kategorie der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ mit stetige Abbildungen als Morphismen.
(8) Die Kategorie der differenzierbaren Varietäten mit differenzierbaren Abbildungen.
(9) Die Kategorie der algebraische Variatäten mit polynomialen Abbildungen.

11.2 Definition
Ein Morphismus : $X \to Y$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt <u>Isomorphismus</u> : $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Morphismus $g : Y \to X$ mit $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$.

11.3 Definition
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein <u>Funktor</u> $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus zwei Abbildungen $F_{\mathrm{Ob}} : \mathrm{Ob}\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\mathcal{D}$ und $F_{\mathrm{Mor}} : \mathrm{Mor}\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\mathcal{D}$, so daß $F_{\mathrm{Mor}}(f : X \to Y) : F_{\mathrm{Ob}}(X) \to F_{\mathrm{Ob}}(Y)$, $F_{\mathrm{Mor}}(1_X) = 1_{F_{\mathrm{Ob}}(X)}$, und $F_{\mathrm{Mor}}(g \circ f) = F_{\mathrm{Mor}}(g) \circ F_{\mathrm{Mor}}(f)$, wenn $g \circ f$ definiert ist, $\forall\, f, g, X, Y$.

Beispiele:

(1) Spiegelungsfunktoren S_i^+, S_i^- : $k\overrightarrow{Q}$-rep $\to k\sigma_i(\overrightarrow{Q})$-rep.
(2) Seien G und H Gruppen, und $\mathcal{C}_G$ und $\mathcal{C}_H$ die zugehörigen Kategorien mit einem Objekt. Ein Funktor $F : \mathcal{C}_G \to \mathcal{C}_H$ ist gegeben durch einen Gruppenhomomorphismus $G \to H$.
(3) Ein Algebrenhomomorphismus $A \to B$ induziert einen Funktor B-mod $\to A$-mod.
(4) Vergißfunktoren: A-mod$\to k$-Vect, k-Vect $\to$ Sets.

11.4 Definition
Sei k ein Körper. Eine Kategorie heißt <u>k-linear</u>, wenn für alle Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, die Menge $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ein k-Vektorraum ist, und die Komposition k-bilinear ist, d.h. $f \circ (g +$

$h) = f \circ g + f \circ h$, $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$, und $(\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) = \lambda(f \circ g)$, $\forall\, \lambda \in k$, $f, g, h \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ so daß die Komposition definiert ist.

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ k-lineare Kategorien. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt k-linear, wenn gilt $F(f+g) = F(f) + f(g)$ und $F(\lambda f) = \lambda F(f)$, $\forall\, \lambda \in k$ und $f, g \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$.

11.5 Definition
Sei $\mathcal{C}$ eine k-lineare Kategorie, $M, M_1, M_2, \ldots, M_n$ Objekte in $\mathcal{C}$. M ist die direkte Summe der M_i, $M = \oplus_{i+1}^n M_i :\iff \exists$ Morphismen $\iota_i : M_i \to M$ und $p_i : M \to M_i$ mit $p_i \circ \iota_i = 1_{M_i}$ für $i = 1, \ldots, n$, $p_i \circ \iota_j = 0$ für $i \neq j$, und $\sum_{i+1}^n \iota \circ p_i = 1_M$.

Daraus folgt: $\iota_i \circ p_i$ sind paarweise orthogonale Idempotente in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M)$.

Bemerkungen:

(1) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein k-lineares Funktor. Aus $M = \oplus_{i=1}^n M_i$ in $\mathcal{C}$ folgt $F(M) = \oplus_{i=1}^n F(M_i)$ in $\mathcal{D}$.

(2) Bei Modulkategorien heißt $M = \oplus_{i=1}^n M_i$ eigentlich $M \cong \oplus_{i=1}^n M_i$, denn die M_i sind isomorph zu Teilmoduln von M.

11.6 Definition
Seien A, B k-Algebren. Ein k-Vektorraum M heißt A-B-Bimodul, ${}_AM_B$, wenn M ein A-Linksmodul und B-Rechtsmodul ist, so daß

$$(am)b = a(mb),\ \ \forall\, m \in M,\ a \in A,\ b \in B.$$

Beispiele:

(1) Die Algebra A selbst ist ein A-A-Bimodul, durch Links- und Rechtsmultiplikation. Ebenso jedes zweiseitige Ideal von A.

(2) Ein A-Modul ist ein A-k-Bimodul.

(3) Ein A-Modul ist ein A-B-Bimodul mit $B = \mathrm{End}_A(M)^{\mathrm{op}}$, oder einer Teilalgebra davon.

11.7 Lemma
Sei M ein A-B-Bimodul. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(M, -)$ ein Funktor von A-mod nach B-mod.

11.8 Definition
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $\eta : F \to G$ besteht aus Morphismen in $\mathcal{D}$:

$$\eta_X : F(X) \to G(X)$$

für $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(Y) & \xrightarrow[\eta_Y]{} & G(Y) \end{array}$$

für $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$. Die Funktorkategorie $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ hat als Objekte die Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und als Morphismen die natürliche Transformationen zwischen Funktoren. Ein Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien : $\iff$ $\exists\, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ mit $G \circ F \cong 1_{\mathcal{C}}$ in $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{C})$ und $\mathbb{F} \circ G \cong 1_{\mathcal{D}}$ in $\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{D})$. Dann heißen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalent als Kategorien.

Beispiele:

(1) Vergleichshomomorphismen (vgl. Lemma 9.7) definieren natürliche Transformationen zwischen $S_i^+ S_i^-$ und Id bzw. $S_i^- S_i^+$ und Id.
(2) Seien G und H Gruppen. Dann sind die Kategorien $\mathcal{C}_G$ und $\mathcal{C}_H$ äquivalent $\iff$ $G \cong H$ als Gruppen.

11.9 Definition
Sei A eine k-Algebra. Eine Folge $\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \ldots$ von (endlich oder unendlich vielen) A-Moduln und A-Modulhomomorphismen heißt exakt, wenn gilt $\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i), \forall\, i$.

Eine exakte Folge $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ heißt eine kurze exakte Folge oder kurze exakte Sequenz. Wenn $M_2 \cong M_1 \oplus M_3$ ist und die Abbildungen in der Folge die Inklusion und die Projektion sind, heißt die Folge zerfallende kurze exakte Sequenz.

11.10 Definition
In einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt $f : X \to Y$ ein Monomorphismus, wenn $\forall\, g, h : Z \to X$, $f \circ g = f \circ h$ impliziert $g = h$. Analog heißt f ein Epimorphismus, wenn $\forall\, g, h : Y \to Z$, $g \circ f = h \circ f$ impliziert $g = h$.

In der Kategorie A-mod gilt: f ist Monomorphismus $\iff$ f ist injektiv, und f ist Epimorphismus $\iff$ f ist surjektiv.

Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien mit Inversem G. Dann gilt $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$, durch $f \mapsto F(f)$, für $X, Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$. Daraus folgt: f ist Monomorphismus $\Rightarrow$ $F(f)$ ist Monomorphismus, f ist Epimorphismus $\Rightarrow$ $F(f)$ ist Epimorphismus.

Begriffe wie Kern, Cokern, Bild können kategoriell definiert werden (müssen aber nicht existieren).

11.11 Proposition
Sei $F : A$-mod$\to B$-mod eine Äquivalenz von Kategorien. Dann gilt:

(1) $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ ist eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln $\iff$ $0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0$ ist eine kurze exakte Sequence von B-Moduln.
(2) $P \in A$-mod ist projektiv $\iff$ $F(P) \in B$-mod ist projektiv.

11.12 Definition
Ein A-Modul P heißt Progenerator (projektiver Erzeuger) : $\iff$ P ist projektiv und $\forall\, M \in$

A-Mod, $\exists\, n$ und $f : P^n \twoheadrightarrow M$.

11.13 Korollar
Sei A-mod $\cong B$-mod. Dann existiert ein Progenerator $P \in B$-mod mit $A \cong \mathrm{End}_B(P)^{\mathrm{op}}$.

11.14 Proposition
Sei $P \in B$-mod. Der Funktor $\mathrm{Hom}_B(P, -) : B$-mod $\to \mathrm{End}_B(P)^{\mathrm{op}}$-mod schickt exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen $\iff P$ ist projektiv.

Ziel: Ein Progenerator P in B-mod liefert eine Äquivalenz von B-mod nach A-mod mit $A = \mathrm{End}_B(P)^{\mathrm{op}}$.

Sei k ein Körper, $U = k^n$ und $V = k^l$ zwei k-Vektorräume mit Basen $\{u_i\}$ und $\{v_j\}$. Setze $U \otimes_k V := k^{nl}$ mit Basis x_{ij}, geschrieben als $u_i \otimes v_j$.

11.15 Proposition
$U \otimes_k V$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft, durch die es eindeutig (bis auf Isomorphie) bestimmt ist: Es existiert eine k-bilineare Abbildung $\pi : U \times V \to U \otimes_k V$, $\pi(x_i, y_j) = x_i \otimes y_j$, so daß gilt: Sei $\varphi : U \times V \to W$ eine k-bilineare Abbildung von Vektorräumen. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\psi : U \otimes_k V \to W$, so daß gilt $\varphi = \psi \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & U \otimes_k V \arrow[dl, "\psi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

11.16 Proposition
Sei A eine k-Algebra. Sei $U \in$ mod-A ein A-Rechtsmodul, und $V \in A$-mod ein A-Linksmodul. Sei $W = U \otimes_k V$ und $W' \subset W$ der Unterraum, der erzeugt ist von allen Elementen der Form $xa \otimes y - x \otimes ay$ für $x \in U$, $y \in V$ und $a \in A$. Der Quotientenraum W/W' heißt <u>Tensorprodukt</u> von U und V (über A) und wird mit $U \otimes_A V$ bezeichnet.

Wie $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$ trägt $U \otimes_A V$ im Allgemeinen keine natürliche A-Modulstruktur.

Beispiel: Seien $e, f \in A$, dann ist $eA \otimes_A Af = e(eA) \otimes_A Af = e \otimes_A eAf$, eAf. Das kann verschwinden.

11.17 Proposition
Sei A eine k-Algebra. Sei $U \in$ mod-A ein A-Rechtsmodul, und $V \in A$-mod ein A-Linksmodul. Sei W ein k-Vektorraum. Sei $\varphi : U \times V \to W$ eine k-bilineare Abbildung, für die gilt $\varphi(xa, y) = \varphi(x, ay)$ für $x \in U$, $y \in V$ und $a \in A$. Dann existiert eine eindeutige lineare

Abbildung $\psi : U \otimes_A V \to W$ mit $\varphi = \psi \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & U \otimes_A V \arrow[dl, "\psi"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Zusätzliche Struktur durch Bimoduln: Ist M ein A-Rechtsmodul und N ein A-B-Bimodul, dann ist $M \otimes_A N$ ein B-Rechtsmodul. Ist M ein C-A-Bimodul und N ein A-Linksmodul, dann ist $M \otimes_A N$ ein C-Linksmodul.

Wenn das Tensorprodukt definiert ist, gilt $(M \otimes_A N) \otimes_B L \cong M \otimes_A (N \otimes_B L)$.

11.18 Proposition

$$_BM_A \otimes_A A \;\cong\; _BM_A, \quad A \otimes_A N_C \;\cong\; _AN_C.$$

Zwei Funktoren $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ heißen <u>adjungierte Funktoren</u>, falls ein natürlicher Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY)$$

existiert für $X \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ und $Y \in \mathrm{Ob}\mathcal{D}$.

11.19 Theorem
Für M_A, $_AN_B$, $_BL$ gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, L) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, L))$$

der einen natürlichen Isomorphismus liefert zwischen $F = \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A -, L)$ und $G = \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(-, L))$, d.h. für jeden A-B-Bimodulhomomorphismus $f : N_1 \to N_2$ kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N_2, L) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "F(f)"'] & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N_2, L)) \arrow[d, "G(f)"] \\ \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N_1, L) \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N_1, L)) \end{tikzcd}$$

Also ist das Tensorprodukt linksadjungiert zum Hom-Funktor.

11.20 Proposition

(1) Die Sequenz $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ von A-Moduln ist exakt $\iff$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(N, M_1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(N,f)} \mathrm{Hom}_A(N, M_2) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(N,g)} \mathrm{Hom}_A(N, M_3)$$

ist exakt für alle A-Moduln N.

(2) $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ von A-Moduln ist exakt $\iff$

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(g,N)} \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f,N)} \mathrm{Hom}_A(M_1, N)$$

ist exakt für alle A-Moduln N.

(3) Die Sequenz $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ ist exakt von A-Rechtsmoduln $\iff$

$$M_1 \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{Id}_N} M_2 \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_N} M_3 \otimes_A N \to 0$$

ist exakt für alle A-Linksmoduln N.

11.21 Theorem (Morita, 1958)
Seien A und B k-Algebren. Die Kategorien A-mod und B-mod sind äquivalent (als k-lineare Kategorien) $\iff$ $\exists$ B-Progenerator P mit $\mathrm{End}_B(P)^{\mathrm{op}} \cong A$. Die Äquivalenz kann durch die Funktoren

$$\mathrm{Hom}_B(P, -) : B\text{-mod} \to A\text{-mod}$$
$$P \otimes_A - : A\text{-mod} \to B\text{-mod}$$

realisiert werden.

11.22 Korollar
Sei ${}_B B = \oplus_{i=1}^n P_i^{n_i}$, wobei P_i die unzerlegbaren projektiven B-Moduln sind. Sei $P = \oplus_{i=1}^n P_i^{l_i}$ mit $l_i \geq 1, \forall\, i$, und sei $A = \mathrm{End}_B(P)^{\mathrm{op}}$. Dann gilt A-mod $\cong$ B-mod.

A und B heißen Morita-äquivalent $:\iff$ A-mod $\cong$ B-mod.