§8. Beispiele von Kettenbrüchen

Der Kettenbruch $[1;1,1,\ldots]$ zum goldenen Schnitt ist besonders regelmäßig, insbesondere periodisch. Kann man bestimmte Regelmäßigkeiten ~~zu~~ erklären und mit mathematischen Eigenschaften verbinden?

8.1 Definition: Ein Kettenbruch der Form $[a_0; a_1,\ldots,a_i, b_1,\ldots,b_\ell, b_1,\ldots,b_\ell,\ldots]$ (d.h. $b_1,\ldots,b_\ell$ wiederholt sich ab einer bestimmten Stelle) heißt periodisch.
$a_0;\ldots,a_i$ heißt die Vorperiode, $b_1,\ldots,b_\ell$ die Periode und ℓ (minimal) die Periodenlänge.

Beispiele: $[1;1,\ldots,1,\ldots] = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$[2;1,\ldots,1,\ldots] = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$[2;3,1,\ldots,1,\ldots] = 2+?$

($[1;0,\ldots,0,\ldots]$ formal auch, aber das ist rational, im Folgenden ausgeschlossen.)

8.2 Theorem: (a) (Euler, 1737) Ein unendlicher periodischer Kettenbruch definiert eine irrationale reelle Zahl, die Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist.
(b) (Lagrange) Jede irrationale reelle Zahl, die algebraisch vom Grad 2 ist, d.h. Nullstelle eines quadratischen Polynoms mit rationalen Koeffizienten, hat einen periodischen Kettenbruch.

Solche Zahlen nennt man auch quadratische Irrationalität oder quadratische Irrationalzahl.
Für algebraische Zahlen vom Grad ≥ 3 ist keine solche Charakterisierung bekannt.

Beweis von 8.2: (a) Sei $\alpha = [a_0; a_1,\ldots]$ ein periodischer Kettenbruch.
Für $i \geq 0$ sei $\alpha_i = [a_i; a_{i+1},\ldots]$, insbesondere $\alpha_0 = \alpha$.
Wir rechnen wieder mit den Elementen p_i und q_i wie in 7.4.

In 7.4 können wir $x = \alpha_i$ wählen und erhalten:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \alpha_i] = \frac{p_{i-1}\alpha_i + p_{i-2}}{q_{i-1}\alpha_i + q_{i-2}} \quad \forall i \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot (q_{i-1}\alpha_i + q_{i-2}) = p_{i-1}\alpha_i + p_{i-2}$$

d.h. $\alpha_i \cdot \alpha \cdot q_{i-1} + \alpha \cdot q_{i-2} = p_{i-1}\alpha_i + p_{i-2}$

d.h. $\alpha_i (\alpha q_{i-1} - p_{i-1}) = p_{i-2} - \alpha q_{i-2}$

$$\Rightarrow \alpha_i = \frac{p_{i-2} - \alpha q_{i-2}}{\alpha q_{i-1} - p_{i-1}} \quad (\alpha \text{ irrational} \Rightarrow \text{Nenner} \neq 0)$$

Soweit war die Rechnung allgemein. Jetzt verwenden wir, daß α periodisch ist mit Periode ℓ $\Rightarrow$ für i groß genug ist $\alpha_i = \alpha_{i+\ell}$.

$$\Rightarrow \frac{p_{i-2} - \alpha q_{i-2}}{\alpha q_{i-1} - p_{i-1}} = \frac{p_{i+\ell-2} - \alpha q_{i+\ell-2}}{\alpha q_{i+\ell-1} - p_{i+\ell-1}}$$

Das ist eine Gleichung für α, genauer: eine quadratische Gleichung.

$$\Leftrightarrow (p_{i-2} - \alpha q_{i-2})(\alpha q_{i+\ell-1} - p_{i+\ell-1}) = (p_{i+\ell-2} - \alpha q_{i+\ell-2})(\alpha q_{i-1} - p_{i-1})$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 (q_{i+\ell-2} q_{i-1} - q_{i-2} q_{i+\ell-1}) + \alpha (p_{i-2} q_{i+\ell-1} + q_{i-2} p_{i+\ell-1} - p_{i+\ell-2} q_{i-1} - q_{i+\ell-2} p_{i-1})$$
$$+ p_{i+\ell-2} p_{i-1} - p_{i-2} p_{i+\ell-1} = 0$$

Die Koeffizienten sind rational, wie verlangt.

Da α irrational ist, kann es nicht Lösung einer linearen Gleichung sein.

Aber das könnte die Gleichung $0 = 0$ sein.

Wir zeigen: der Koeffizient des quadratischen Terms ist $\neq 0$.

Allgemeiner:

Behauptung: Für $i \neq j$ ist $q_{j-2} q_{i-1} - q_{i-2} q_{j-1} \neq 0$

Beweis (für $j > i$): $i = 0 \Rightarrow q_{i-1} = 0$, $q_{i-2} = 1$ ✓

Sei nun $j > i \geq 1$ $\Rightarrow$ alle q_i's sind positiv.

7.4(c) $\Rightarrow p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i \Rightarrow (q_i, q_{i-1}) = 1$, zwei benachbarte q_i's sind immer teilerfremd

Annahme: $q_{j-2} q_{i-1} = q_{i-2} q_{j-1}$. $\Rightarrow q_{i-1} | q_{j-1}$, $q_{j-2} | q_{i-2}$, $q_{i-2} | q_{j-2}$, $q_{j-1} | q_{i-1}$

Das geht nur, wenn $q_{i-1} = q_{j-1}$ und $q_{i-2} = q_{j-2}$ ↯ zu (q_i) streng monoton wachsend

$\Rightarrow$ (a)

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ Nullstelle einer quadratischen Gleichung

$$Rx^2+Sx+T=0 \quad \text{mit } \underbrace{R,S,T\in\mathbb{Z}}_{\text{warum kommen die ganz vorher?}},\ R\neq 0,\ S^2-4RT>0$$

und $\alpha=[a_0; a_1, a_2, \dots]$

Wieder schreiben wir $\alpha = \dfrac{p_{i-1}\alpha_i+p_{i-2}}{q_{i-1}\alpha_i+q_{i-2}}$

$$\Rightarrow R(p_{i-1}\alpha_i+p_{i-2})^2+S(p_{i-1}\alpha_i+p_{i-2})(q_{i-1}\alpha_i+q_{i-2})+T(q_{i-1}\alpha_i+q_i)^2=0 \quad \forall i\geq 0$$

Das ist eine quadratische Gleichung für α_i, abhängig von i.

Wir suchen ein ℓ mit $\alpha_i=\alpha_{i+\ell}$. Also sollten wir diese Gleichungen miteinander vergleichen und sehen, daß sich etwas wiederholt.

Zuerst sollten wir die Gleichung für α_i hinschreiben:

α_i erfüllt: $R_ix^2+S_ix+T_i=0$ mit

$$R_i = Rp_{i-1}^2+Sp_{i-1}q_{i-1}+Tq_{i-1}^2$$
$$S_i = 2Rp_{i-1}p_{i-2}+S(p_{i-2}q_{i-1}+p_{i-1}q_{i-2})+2Tq_{i-1}q_{i-2}$$
$$T_i = Rp_{i-1}^2+Sp_{i-2}q_{i-2}+Tq_{i-2}^2$$
$$= R_{i-1}$$

Übersichtlicher als Matrizengleichung:

$$\begin{pmatrix} 2R_i & S_i \\ S_i & 2T_i\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{i-1} & q_{i-1} \\ p_{i-2} & q_{i-2}\end{pmatrix}}_{\substack{\det = p_{i-1}q_{i-2}-q_{i-1}p_{i-2} \\ =(-1)^i \ (7.4(c))}} \begin{pmatrix} 2R & S \\ S & 2T\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} p_{i-1} & q_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2}\end{pmatrix}}_{\text{ebenso: } \det=(-1)^i}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\det\begin{pmatrix} 2R_i & S_i \\ S_i & 2T_i\end{pmatrix}}_{4R_iT_i-S_i^2} = \underbrace{\det\begin{pmatrix} 2R & S \\ S & 2T\end{pmatrix}}_{4RT-S^2} \quad \forall i\geq 0$$

Wir suchen nach einer Wiederholung, also zeigen wir, daß die Folgen $|R_i|, |T_i|, |S_i|$ beschränkt sind. (Das sind ganze Zahlen.)

Wie im Beweis von 1.5 ist ~~$\alpha - \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$~~ $\alpha-\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = \dfrac{(-1)^{i-1}}{q_{i-1}(q_{i-1}\alpha_i+q_{i-2})}$

$$\Rightarrow |\alpha q_{i-1}-p_{i-1}| = \frac{1}{q_{i-1}\alpha_i+q_{i-2}} < \frac{1}{q_{i-1}\underbrace{a_i}_{\lfloor\alpha_i\rfloor}+q_{i-2}} \underset{\text{Def}}{=} \frac{1}{q_i}$$

$\Rightarrow p_{i-1} = \alpha q_{i-1} + \vartheta_i \frac{1}{q_i}$ für ein ϑ_i mit $0 < |\vartheta_i| < 1$ für $i \geq 0$
α irrational

$$\Rightarrow R_i = R(\alpha q_{i-1} + \vartheta_i \frac{1}{q_i})^2 + S(\alpha q_{i-1} + \vartheta_i \frac{1}{q_i}) q_{i-1} + T q_{i-1}^2$$
$$= R\alpha^2 q_{i-1}^2 + 2R\alpha q_{i-1} \vartheta_i \frac{1}{q_i} + R\vartheta_i^2 \frac{1}{q_i^2} + S\alpha q_{i-1}^2 + S\vartheta_i \frac{q_{i-1}}{q_i} + T q_{i-1}^2$$
$$= \underbrace{(R\alpha^2 + S\alpha + T)}_{0} q_{i-1}^2 + (2R\alpha + S)\vartheta_i \underbrace{\frac{q_{i-1}}{q_i}}_{|\cdot|<1} + R \underbrace{\frac{\vartheta_i^2}{q_i^2}}_{|\cdot|<1}$$

$\Rightarrow |R_i| \leq |2R\alpha + S| + |R| \quad \forall i$

$\Rightarrow$ Die ganzzahlige Folge $(|R_i|)_i$ ist beschränkt.

Wegen $T_i = R_{i-1}$ ist auch die Folge $(|T_i|)$ beschränkt.

$S_i^2 = 4R_iT_i - 4RT + S^2 \Rightarrow$ auch (S_i) ist eine beschränkte Folge.

$\Rightarrow$ Die Tripel (R_i, S_i, T_i) müssen einen festen Wert $(\tilde{R}, \tilde{S}, \tilde{T})$ unendlich oft annehmen. Der erfüllt natürlich auch $\tilde{S}^2 - 4\tilde{R}\tilde{T} = S^2 - 4RT$. Das ist kein Quadrat, weil α und α_i keine ganzen Zahlen sind.

$\Rightarrow \tilde{R}\tilde{T} \neq 0$, $\tilde{R}x^2 + \tilde{S}x + \tilde{T}$ hat zwei verschiedene reelle irrationale Wurzeln, wobei alle α_i (die zu der unendlichen Wiederholung gehören) solche Wurzeln sein müssen – von denen es nur zwei gibt.

$\Rightarrow \exists\ i < j = i + \ell$ mit $\alpha_j = \alpha_i$, d.h. $[a_i; a_{i+1}, \ldots] = [a_{i+\ell}; a_{i+\ell+1}, \ldots]$

Unendliche Kettenbruchentwicklungen sind eindeutig

$\Rightarrow a_i = a_{i+\ell}, a_{i+1} = a_{i+1+\ell}, \ldots \Rightarrow$ die Entwicklung ist periodisch. $\square$

Ein hübsches Beispiel von periodischen Kettenbrüchen ist $\alpha = n + \sqrt{1+n^2}$, eine Lösung von $x^2 - 2nx - 1 = 0$, genauer: die positive Lösung.

$\Rightarrow \alpha^2 = 2n\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = 2n + \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \alpha = [2n; 2n, 2n, \ldots]$ (denn dafür stimmt diese Gleichung)

$\Rightarrow \sqrt{1+n^2} = [n; 2n, 2n, 2n, \ldots]$

Zum Beispiel: $\sqrt{5} = [2; 4, 4, \ldots]$

Der Trick mit der Rekursionsgleichung funktioniert immer:

$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x = p + \frac{q}{x} = p + \frac{1}{x/q}$, am einfachsten für $q = 1$.

Rationale Zahlen haben endliche Kettenbrüche. Quadratische Irrationalitäten haben periodische unendliche Kettenbrüche.
Was sollte man allgemein erwarten? Haben algebraische Zahlen, also Nullstellen von Polynomen mit rationalen Koeffizienten, im Allgemeinen „regelmäßige" Kettenbrüche? Und transzendente Zahlen (die keine Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{Q}[x]$ sind) „chaotische"?
Nein!

8.3 Proposition: (a) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\dfrac{e^{2k}+1}{e^{2k}-1} = [k; 3k, 5k, 7k, \ldots]$

(b) $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, \ldots]$

(Daraus folgt Irrationalität.
Die Dezimalentwicklung von e ist $2{,}718281828459045235360287\ldots$)

Beweis: (a) Die Kettenbrüche sollen wieder aus rekursiven Formeln abgeleitet werden.

Hilfsgrößen: $\xi_n := \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 x^n (1-x)^n e^{2x/k}\, dx$ $(k \in \mathbb{N})$

$$\eta_n := \frac{1}{n!} \int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n e^{2x/k}\, dx$$

$\forall n: \xi_n > 0, \eta_n > 0$

Die Rekursionsformel wird für die ξ_n sein. Die η_n kommen unterwegs vor.
Die Integrale behandeln wir für $n \geq 1$ mit partieller Integration: $\int fg' = fg| - \int fg'$

Sei $f(x) := \frac{k}{2} e^{2x/k}$, also $f'(x) = e^{2x/k}$

$g(x) := x^n (1-x)^n$, also $g'(x) = n x^{n-1} (1-x)^{n-1} (1-2x)$

$$\Rightarrow \xi_n = \frac{1}{n!} \int_0^1 f' g\, dx = \frac{1}{n!} \underbrace{fg\Big|_0^1}_{0 \text{ für } n \geq 1} - \frac{1}{n!} fg'\, dx =$$

$$= \frac{1}{n!} n \int_0^1 (2x-1) x^{n-1} (1-x)^{n-1} \frac{k}{2} e^{2x/k}\, dx$$

$$\Rightarrow n! \frac{2}{k} \xi_n = n \int_0^1 (2x-1) x^{n-1} (1-x)^{n-1} e^{2x/k}\, dx = n! (2\eta_{n-1} - \xi_{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{2}{k} \xi_n + \xi_{n-1} = 2\eta_{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

Das zweite Integral, auch mit partieller Integration:

$f(x) := \frac{k}{2} e^{2x/k}$, aber $g(x) := x^{n+1}(1-x)^n$, $g'(x) = (n+1)x^n(1-x)^n - n x^{n+1}(1-x)^{n-1} =$

$= ((n+1) - (2n+1)x)\, x^n (1-x)^{n-1}$

$$y_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 f'g\,dx = \underbrace{fg\Big|_0^1}_{0 \text{ für } n\geq 1} - \frac{1}{n!}\int_0^1 fg'\,dx =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 ((2n+1)x - (n+1))\, x^n (1-x)^{n-1} \frac{k}{2} e^{2x/k}\,dx$$

$\Rightarrow \frac{2}{k} y_n = y_{n-1} - (2n+1)\xi_n$, also $(2n+1)\xi_n = y_{n-1} - \frac{2}{k} y_n$ für $n \geq 1$ $(*)$

Vorher hatten wir schon: $y_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}\xi_n + \xi_{n-1}\right) = \frac{1}{k}\xi_n + \frac{1}{2}\xi_{n-1}$

und $y_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k}\xi_{n+1} + \xi_n\right) = \frac{1}{k}\xi_{n+1} + \frac{1}{2}\xi_n$

Einsetzen in $(*)$ $\Rightarrow (2n+1)\xi_n = y_{n-1} - \frac{2}{k} y_n = \frac{1}{2}\xi_{n-1} - \frac{2}{k^2}\xi_{n+1}$

$\Rightarrow (2n+1)k\,\xi_n = \frac{k}{2}\xi_{n-1} - \frac{2}{k}\xi_{n+1}$, d.h. $\frac{k}{2}\xi_{n-1} = (2n+1)k\,\xi_n + \frac{2}{n}\xi_{n+1}$

$\Rightarrow \frac{k\,\xi_{n-1}}{2\,\xi_n} = (2n+1)k + \frac{2\,\xi_{n+1}}{k\,\xi_n}$ $(**)$, was schon nach Kettenbruch aussieht.

Wir müssen noch die Anfangsterme für $n=0$ berechnen:

$$\xi_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 x^0(1-x)^0 \cancel{dx}\, e^{2x/k}\,dx = \int_0^1 e^{2x/k}\,dx = \frac{k}{2} e^{2x/k}\Big|_0^1 = \frac{k}{2}\left(e^{2/k} - 1\right)$$

$$y_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 x^1 (1-x)^0 e^{2x/k}\,dx = \int_0^1 x\, e^{2x/k}\,dx \overset{\text{partielle Integration}}{=}$$

$$= \frac{k}{2} x\, e^{2x/k}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{k}{2} e^{2x/k}\,dx = \frac{k}{2} e^{2/k} - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \left(e^{2/k} - 1\right)$$

Wegen $\frac{2}{k}\xi_1 + \xi_0 = 2y_0$ folgt $\frac{2}{k}\xi_1 = 2y_0 - \xi_0 = k e^{2/k} - 2\left(\frac{k}{2}\right)^2\left(e^{2/k} - 1\right) - \frac{k}{2}\left(e^{2/k} - 1\right)$

$\Rightarrow \xi_1 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \left(e^{2/k} + 1 - k\left(e^{2/k} - 1\right)\right)$

$$\Rightarrow \frac{e^{2/k} + 1}{e^{2/k} - 1} = k + \frac{2\xi_1}{k\xi_0} = \left[k; \frac{k\xi_0}{2\xi_1}\right] \text{ in Kettenbruchschreibweise}$$

$$\overset{(**)\text{ für } n=1}{=} \left[k; 3k, \frac{k\xi_1}{2\xi_2}\right] \underset{\text{mit Induktion nach } n}{=} [k; 3k, 5k, 7k, \ldots]$$

Das war die Hauptarbeit.

Daraus (b) abzuleiten zu ist einfacher.

(b) Für $k=2$ ergibt (a): $\frac{e+1}{e-1} = [2; 6, 10, 14, \ldots, a_i = 4i+2, \ldots]$

und $\frac{e+1}{e-1} = \lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{q_i}$, nach Konstruktion der Näherungsbrüche

$$e = \frac{\frac{e+1}{e-1} + \frac{e-1}{e-1}}{\frac{e+1}{e-1} - \frac{e-1}{e-1}} = \frac{\frac{e+1}{e-1}+1}{\frac{e+1}{e-1}-1} = \lim_{i\to\infty} \frac{\frac{p_i}{q_i}+1}{\frac{p_i}{q_i}-1} = \lim_{i\to\infty} \frac{p_i+q_i}{\underline{p_i-q_i}}$$

$p_i > q_i$ für i groß, da $\frac{p_i}{q_i} \to \frac{e+1}{e-1}$

Also sollten wir die p_i und q_i genauer anschauen.

Wir wollen zeigen: $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \ldots]$

$= [b_0; b_1, b_2, \ldots]$ mit $b_0 = 2$, $b_{3i-2} = 1 = b_{3i}$, $b_{3i-1} = 2i$ für $i \geq 1$

Das ist jedenfalls ein Kettenbruch mit Näherungsbrüchen $\frac{r_i}{s_i}$.

Zu zeigen ist also: $\lim_{i\to\infty} \frac{r_i}{s_i} = e$, d.h. $\lim_{i\to\infty} \frac{r_i}{s_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{p_i+q_i}{p_i-q_i}$

Da beide Folgen konvergieren, reicht es, Teilfolgen mit dem gleichen Grenzwert zu finden.

Behauptung: $\forall i \geq 0$: $r_{3i+1} = p_i + q_i$, $s_{3i+1} = p_i - q_i$

Beweis: Natürlich vergleichen wir die Rekursionsformeln.

z.B. als Induktionsanfang: $\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1}$, $\frac{p_1}{q_1} = \frac{13}{6}$, $\frac{r_1}{s_1} = \frac{3}{1} = \frac{2+1}{2-1}$, $\frac{r_4}{s_4} = \frac{19}{7} = \frac{13+6}{13-6}$ ✓

nun für $i \geq 2$ mit den Rekursionsformeln:

$r_{3i-3} = r_{3i-4} + r_{3i-5}$ (da die Koeffizienten im Kettenbruch $1, 2i, 1, \ldots$ sind)

$r_{3i-2} = r_{3i-3} + r_{3i-4}$

$r_{3i-1} = 2i \cdot r_{3i-2} + r_{3i-3}$

$r_{3i} = r_{3i-1} + r_{3i-2}$

$r_{3i+1} = r_{3i} + r_{3i-1}$

…

Linearkombinationen ⇝ $r_{3i-3} - r_{3i-2} + 2r_{3i-1} + r_{3i} \frac{+}{?} r_{3i+1} =$

$= r_{3i-4} + r_{3i-5} - r_{3i-3} - r_{3i-4} + 4i \cdot r_{3i-2} + 2r_{3i-3} + r_{3i-1} + r_{3i-2} + r_{3i} + r_{3i-1}$

$\Rightarrow r_{3i+1} = (4i+2)\, r_{3i-2} + r_{3i-5}$ (nur noch Terme mit Indizes $\equiv 1 \bmod 3$)

$\overset{\text{Ind}}{=} (4i+2)(p_{i-1} + q_{i-1}) + (p_{i-2} + q_{i-2})$

$= p_i + q_i$ (Rekursion für p_i und q_i: $p_i = (4i+2)\, p_{i-1} + p_{i-2}$)

analog für s_i □

Die Kettenbruchentwicklung von e ist also sehr regelmäßig

Die Kettenbruchentwicklung algebraischer Zahlen kann chaotisch aussehen:
$\sqrt[3]{5} = [1;1,2,4,3,3,1,5,1,1,4,10,17,1,14,1,1,3052,1,1,1,\ldots]$
reelle Nullstelle von $x^3-8x-10$:
$[3;3,7,4,2,30,1,\ldots,\underset{a_{17}}{22986},\ldots,\underset{a_{33}}{1501790},\ldots,\underset{a_{121}}{16467250},\ldots,\underset{a_{139}}{48120},\ldots]$

Lang und Trotter haben 1972 für diese und weitere algebraische Zahlen die ersten 3000 Einträge der Kettenbrüche berechnet und auf Muster bzw auf Zufälligkeit (χ^2-Test) untersucht und keine signifikante Abweichung von zufälligem Verhalten gefunden.

Experten erwarten, daß eine irrationale Zahl α mit "einfachem" Kettenbruch entweder quadratisch irrational ist oder transzendent. Was "einfach" heißt, ist natürlich unklar – periodisch gehört dazu, aber auch ein Satz von Adamczewski und Bugeaud (On the complexity of algebraic numbers II: continued fractions, Acta Math 195 (2005), 1–20): Sei $\alpha = [0; a_1, a_2, \ldots]$ ein unendlicher, nicht periodischer Kettenbruch, der "stottert." Dann ist α transzendent.
"Stottern" heißt: $\exists\, w \geq 2$ und eine Folge von Anfangsstücken $(a_0 \ldots a_j)$ im Kettenbruch mit streng monoton wachsender Länge (also $j \to \infty$), die sich jeweils mindestens w mal wiederholt (also: α beginnt mit $\underbrace{a_1 - a_j\; a_1 - a_j\; a_1 - a_j}_{w \text{ mal}}$).

(Wenn man also nur den Anfang anschaut, denkt man der Kettenbruch sei periodisch, aber je länger man hinschaut, desto größer wird die Periode.)
~~And~~ Adamczewski, Bugeaud und andere haben noch weitere solche Kriterien gefunden, die Transzendenz aus "Regelmäßigkeit" des Kettenbruchs folgern, in gewissem Sinn aus "niedriger Komplexität."
Die Methoden gehören ~~[illegible]~~ zur diophantischen Approximation, die wir im Zusammenhang mit den Näherungsbrüchen betrachten werden.

Wie sieht es aus, wenn man nicht die Kettenbruchentwicklung von α betrachtet, sondern die Dezimalentwicklung?
Im Dezimalsystem hat eine rationale Zahl eine endliche Entwicklung (wenn durch Erweitern der Nenner eine Zehnerpotenz ist) oder die Entwicklung wird periodisch (wann? warum?).
Im b-adischen System mit Basis $b \geq 2$ sieht es analog aus.
Was ist bei irrationalen algebraischen Zahlen zu erwarten?
Émile Borel hat 1950 eine sehr allgemeine Erwartung formuliert, die insbesondere sagt, daß irrationale algebraische Zahlen bezüglich der Basis b "normal" ~~ist~~ sind: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kommt jede der b^n möglichen Anordnungen der Ziffern $\{0, \ldots, b-1\}$ in eine Folge der Länge n "gleich oft" vor ("Häufigkeit" oder "Wahrscheinlichkeit" $\frac{1}{b^n}$).
Dieser weitreichenden Vermutung steht z.B. die offene ~~tes~~ Frage im Weg: Kommt die Ziffer 7 in der Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$ unendlich oft vor?
Also auch hier wieder: "niedrige Komplexität" sollte Transzendenz implizieren. Ebenso sollte Transzendenz aus "Berechenbarkeit" folgen.
Unterstützung erhalten diese Vermutungen durch Ergebnisse von Adamczewski und Bugeaud ("On the complexity of algebraic numbers I. Expansions in integer bases." Annals of Math 165 (2007), 547–565.) Ein Ergebnis:
Sei $b \geq 2$. Dann gilt: $\underbrace{\lim_{n\to\infty}}_{\liminf} \frac{p(n)}{n} = \infty$. Dabei ist $p(n)$ die Komplexitätsfunktion, die zählt, wieviele verschiedene ~~Block~~ Ziffernblöcke der Längen in der b-adischen Entwicklung vorkommen.
(Also ist: $1 \leq p(n) \leq b^n$ nach Definition. Wenn die Entwicklung periodisch ist, $b_1 \ldots b_\ell b_1 \ldots b_\ell \ldots$, dann zählt $p(n)$ dagegen nur $\underbrace{b_1 \ldots b_\ell b_1 \ldots}_{\text{Länge } n}$, $\underbrace{b_2 b_3 \ldots b_\ell b_1 \ldots}_{\text{Länge } n}$, also höchstens n verschiedene und $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} \leq 1$.)
Damit erhält man auch wieder Transzendenzkriterien.