§7. Kettenbrüche

Der Ausgangspunkt in diesem Kapitel ist wieder ganz elementar, der Euklidische Algorithmus, d.h. iterierte Division mit Rest.

Also: Gegeben $r_0, r_1 \in \mathbb{N}$, $r_0 > r_1$, Division mit Rest ⇝

$$\left.\begin{array}{l} r_0 = a_0 r_1 + r_2 \text{ mit } 0 \le r_2 < r_1 \\ r_1 = a_1 r_2 + r_3 \text{ mit } 0 \le r_3 < r_2 \\ \quad | \end{array}\right\} \text{solange der Rest} \neq 0 \text{ ist}$$

$$r_j = a_j r_{j+1} + 0 \qquad \text{(erstmalig Rest} = 0)$$

Beispiel: $r_0 = 67, r_1 = 24$ ⇝

$$\begin{array}{lll} 67 = 2 \cdot 24 + 19 & a_0 = 2 & r_2 = 19 \\ 24 = 1 \cdot 19 + 5 & a_1 = 1 & r_3 = 5 \\ 19 = 3 \cdot 5 + 4 & a_2 = 3 & r_4 = 4 \\ 5 = 1 \cdot 4 + 1 & a_3 = 1 & r_5 = 1 \\ 4 = 4 \cdot 1 + 0 & a_4 = 4 & r_6 = 0 \end{array}$$

Diese Gleichungen können wir auch mit Brüchen schreiben:

$$\begin{array}{ll} \frac{67}{24} = 2 + \frac{19}{24} & \frac{r_0}{r_1} = a_0 + \boxed{\frac{r_2}{r_1}} \\ \frac{24}{19} = 1 + \frac{5}{19} & \boxed{\frac{r_1}{r_2}} = a_1 + \boxed{\frac{r_3}{r_2}} \\ \frac{19}{5} = 3 + \frac{4}{5} & \boxed{\frac{r_2}{r_3}} = a_2 + \boxed{\frac{r_4}{r_3}} \\ \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} & \boxed{\frac{r_3}{r_4}} = a_3 + \frac{r_5}{r_3} \\ \frac{4}{1} = 4 & \end{array}$$

Der Kehrwert von $\frac{r_2}{r_1}$ steht in der nächsten Gleichung.

$$\Rightarrow \cancel{\frac{67}{64}} \; \frac{67}{24} = 2 + \frac{19}{24} = 2 + \frac{1}{24/19} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{19}} =$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{19/5}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5/4}}} =$$

$$= \underset{a_0}{2} + \cfrac{1}{\underset{a_1}{1} + \cfrac{1}{\underset{a_2}{3} + \cfrac{1}{\underset{a_3}{1} + \cfrac{1}{\underset{a_4}{4}}}}}$$

Das ist ein Beispiel eines Kettenbruchs.

Notation: $[a_0\overset{\substack{\text{Strichpunkt}\\ \downarrow}}{;}\, a_1 \overset{\substack{\text{Kommas}\\ \swarrow \; \downarrow}}{,\, -,}\, a_j]$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ ($a_0 = 0$ wird oft weggelassen). Für $i \geq 1$ sind die a_i nichtnegativ.

Jede rationale Zahl $\frac{r_0}{r_1}$ lässt sich als (endlicher) Kettenbruch schreiben, weil der Euklidische Algorithmus nach endlich vielen Schritten endet.

Umgekehrt definiert $[a_0; a_1, -, a_j]$ eine rationale Zahl $\frac{r_0}{r_1}$.

In welchem Sinn diese Darstellung eindeutig ist, müssen wir noch klären.

Idee: Beschreibe irrationale reelle Zahlen durch unendliche Kettenbrüche, also Folgen $[a_0; a_1, a_2, -]$. Danach stellen sich viele Fragen:

Was sagt die Folge dann über die Zahl aus?

Was haben die endlichen Teilstücke $[a_0; a_1, -, a_j]$ der Folge mit der Zahl zu tun?

Sind unendliche Kettenbrüche besser als die übliche Dezimalentwicklung?

Das Problem bei den unendlichen Folgen wird natürlich die Konvergenz sein. Deshalb folgt jetzt erstmal Notation und dann einige Formeln zu Kettenbrüchen.

In $\frac{r_0}{r_1} = a_0 + \frac{r_2}{r_1}$ ist $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq \frac{r_2}{r_1} < 1 \Rightarrow a_0 = \lfloor \frac{r_0}{r_1} \rfloor$ (die größte ganze Zahl $\leq \frac{r_0}{r_1}$) und $\frac{r_2}{r_1} = \{\frac{r_0}{r_1}\}$ der gebrochene Anteil. [manche schreiben $[\frac{r_0}{r_1}]$

⇝ Rechts steht für eine Zahl α also $\lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}$, und α wird zerlegt in $\lfloor \alpha \rfloor + \{\alpha\}$.

Im nächsten Schritt steht dann $\frac{1}{\{\alpha\}}$ auf der linken Seite.

Das geht natürlich auch für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sei $\alpha_0 := \alpha \in \mathbb{R}$ irgendeine reelle Zahl.

$a_0 := \lfloor \alpha_0 \rfloor$, $\alpha_1 := \frac{1}{\{\alpha_0\}}$ falls $\alpha_0 \notin \mathbb{Z}$ ⇝ $\alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$

$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$ mit $a_1 := \lfloor \alpha_1 \rfloor$, $\frac{1}{\alpha_2} = \{\alpha_1\}$ falls $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$

|

$\alpha_{j-1} = a_{j-1} + \frac{1}{\alpha_j}$

$\alpha_j = a_j$ falls $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, sonst macht man eben weiter ⇝ Folge $(\overset{\substack{\mathbb{Z}\\ \downarrow}}{a_j})_{j \in \mathbb{N}}$

mit $a_i \in \mathbb{N}$ für $i \geq 1$

Das produziert jedenfalls eine Folge ganzer Zahlen.

4.1 Definition: Sei $\alpha_0 \in \mathbb{R}$. Der Kettenbruch von α_0 ist die Folge
$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_i, \dots]$ mit $a_0 := \lfloor \alpha_0 \rfloor$ und

$$\alpha_{i+1} := \begin{cases} \{\alpha_i\}^{-1}, & \text{falls } \alpha_i \notin \mathbb{Z} \\ 0, & \text{falls } \alpha_i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

und $a_{i+1} := \lfloor \alpha_{i+1} \rfloor$

Falls $a_{i+1} = \dots = 0$ schreibt man $[a_0; a_1, \dots, a_i]$ und nennt den Kettenbruch endlich, sonst unendlich.

Wie oben: $\alpha_i = a_i + \{\alpha_i\} \overset{\substack{\text{falls } \{\alpha_i\} \neq 0 \\ \downarrow}}{=} a_i + \dfrac{1}{\alpha_{i+1}}$

Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist das der Kettenbruch von der ersten Seite.

4.2 Proposition: Die Kettenbruchentwicklung von $\alpha \in \mathbb{R}$ liefert eine endliche Folge genau dann, wenn $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Beweis?

Fragen: Wenn die Kettenbruchentwicklung unendlich ist:

Konvergiert $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_i] \xrightarrow{i \to \infty}$ irgendeinen Grenzwert?

sogar gegen α_0?

Ist eine beliebige Folge von a_i's immer der Kettenbruch einer reellen Zahl?

Was bedeuten die rationalen Zahlen $[a_0; a_1, \dots, a_i]$ für α_0?

4.3 Definition: Für eine Folge $[a_0; a_1, \dots, a_i, \dots]$ heißt $A_i := [a_0; a_1, \dots, a_i]$ der i-te Näherungsbruch des Kettenbruchs $[a_0; a_1, \dots]$.

Die Bedeutung der Näherungsbrüche ist schon für $\alpha_0 \in \mathbb{Q}$ noch zu klären.
In diesem Kapitel ist die Aufgabe aber die Konvergenz.

Wir definieren rekursiv zwei Hilfsfolgen (p_i) und (q_i):

$p_{-2} := 0,\ p_{-1} := 1,\ p_i := a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ $(\Rightarrow p_0 = a_0,\ p_1 = a_1 a_0 + 1, \ldots)$

$q_{-2} := 1,\ q_{-1} := 0,\ q_i := a_i q_{i-1} + q_{i-2}$ $(\Rightarrow q_0 = 1,\ q_1 = a_1, \ldots)$

$a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{N}$ für $i \geq 1 \Rightarrow p_i \in \mathbb{Z},\ q_i \in \mathbb{N}\ \forall i \geq 0.$

Wenn (a_i) eine unendliche Folge ist: $a_i \geq 1\ \forall i \Rightarrow q_i \geq q_{i-1} + q_{i-2} \Rightarrow (q_i)$ unbeschränkt

x ist eine Unbestimmte, die wir noch in den Kettenbruch einsetzen können.

7.4 Lemma: (a) $\forall i \geq 0: [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x] = \dfrac{p_{i-1} x + p_{i-2}}{q_{i-1} x + q_{i-2}}$

(b) $A_i = \dfrac{p_i}{q_i}\ \forall i \geq 0$

(c) $\forall i \geq -1: p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = (-1)^i$

(d) $\forall i \geq -2: (p_i, q_i) = 1$ (teilerfremd)

(e) $\forall i \geq -1: A_{i-1} - A_i = \dfrac{(-1)^i}{q_{i-1} q_i}$

(f) $\forall i \geq 0: p_{i-2} q_i - p_i q_{-2} = (-1)^{i-1} a_i$

(g) $A_i - A_{i-2} = \dfrac{(-1)^i a_i}{q_{i-2} q_i}\ \forall i \geq 2$

(bei endlichen Kettenbrüchen $[a_0; a_1, \ldots, a_k]$ läuft i nur bis k)

Warum ist das interessant? (g) sagt für i gerade: $A_0, A_2, A_4, \ldots$ ist streng monoton wachsend, und für i ungerade: $A_1, A_3, A_5, \ldots$ ist streng monoton fallend. (e) vergleicht gerade und ungerade Terme.

Beweis: (a) $i = 0$: $[x] \overset{\text{Definition}}{=} x = \dfrac{1 \cdot x + 0}{0 \cdot x + 1}$

Induktion nach i: $[a_0; a_1, \ldots, a_i, x] = [a_0; a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + \frac{1}{x}] \overset{\text{ein Eintrag weniger}}{=}$

$$\overset{\text{Indvor}}{=} \frac{p_{i-1}(a_i + \frac{1}{x}) + p_{i-2}}{q_{i-1}(a_i + \frac{1}{x}) + q_{i-2}} = \frac{p_{i-1} \cdot \frac{1}{x} + (p_{i-1} a_i + p_{i-2})}{q_{i-1} \frac{1}{x} + (q_{i-1} a_i + q_{i-2})} =$$

$$= \frac{\frac{p_{i-1}}{x} + p_i}{\frac{q_{i-1}}{x} + q_i} = \frac{p_{i-1} + p_i x}{q_{i-1} + q_i x}$$

(b) $x = a_i$ in (a) $\Rightarrow [a_0; a_1, \ldots, a_i] = \dfrac{p_{i-1} a_i + p_{i-2}}{q_{i-1} a_i + q_{i-2}} = \dfrac{p_i}{q_i}$

(c) $i = -1$ ✓

weiter mit Induktion nach i:

$$p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i \overset{\text{Def}}{=} p_i (a_{i+1} q_i + \overset{q_{i-1}}{\overset{\downarrow}{q_{i+1}}}) - (a_{i+1} p_i + p_{i-1}) q_i =$$

$$= p_i \underbrace{q_{i+1}}_{q_{i-1}} - \underbrace{p_{i+1}}_{p_{i-1}} q_i \overset{\text{Ind.}}{=} (-1)^{i+1}$$

(d) folgt wie?

(e) $A_{i-1} - A_i = \dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}} - \dfrac{p_i}{q_i} \Rightarrow (A_{i-1} - A_i)\, q_{i-1} q_i = p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} \overset{(c)}{=} (-1)^i$

(f) $i = 0$ ✓

weiter mit Induktion nach i

$$p_{i-1} q_{i+1} - p_{i+1} q_{i-1} = p_{i-1}(a_{i+1} q_i + q_{i-1}) - (a_{i+1} p_i + p_{i-1}) q_{i-1} =$$

$$= a_{i+1}(p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1}) \overset{(c)}{=} a_{i+1} \cdot (-1)^i$$

(g) $A_i - A_{i-2} = \dfrac{p_i}{q_i} - \dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} \Rightarrow (A_i - A_{i-2}) q_i q_{i-2} = p_i q_{i-2} - p_{i-2} q_i = -(-1)^{i-1} a_i$ $\square$

Daraus folgt schon die Konvergenz:

4.5 Theorem: (a) Die Folge $A_0, A_2, A_4, \ldots$ ist streng monoton wachsend. Die Folge $A_1, A_3, A_5, \ldots$ ist streng monoton fallend. Für i gerade und j ungerade gilt $A_i < A_j$.

(b) Sei $[a_0; a_1, \ldots]$ unendlich. Dann konvergiert die Folge $(A_i)_{i \geq 0}$ der Näherungsbrüche gegen eine reelle Zahl $\alpha \notin \mathbb{Q}$, für die gilt:

$$A_0 < A_2 < \ldots < \alpha < \ldots < A_3 < A_1$$

Wir schreiben $\alpha = [a_0; a_1, \ldots]$ (und müssen das noch rechtfertigen).

Beweis: (a) Die Monotonie folgt aus 4.4(g). 4.4(e) $\Rightarrow A_{2i} < A_{2i+1}$.

Sei $i = 2s$ und $j = 2t+1$. Falls $s \leq t$: $A_{2s} \leq A_{2t} < A_{2t+1}$

$s > t$: $A_{2s} < A_{2s+1} < A_{2t+1}$

(b) $A_0 < A_2 < A_4 < \ldots < A_1 \Rightarrow A_{2n} \xrightarrow{n \to \infty} \alpha'$ konvergent
$A_1 > A_3 > \ldots > A_0 \Rightarrow A_{2n+1} \xrightarrow{n \to \infty} \alpha''$ konvergent
und $\alpha'' \geq \alpha'$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha'' - \alpha' < A_{2s-1} - A_{2s} \overset{1.4(e)}{=} \frac{1}{q_{2s-1} \cdot q_{2s}} \longrightarrow 0 \text{ weil } q_i \to \infty$$

$$\Rightarrow \alpha' = \alpha''$$

Noch zz: $\alpha := \alpha' = \alpha''$ ist irrational.

Angenommen $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{a}{b} = \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} A_{2n+1}$

$A_{2n} < A_{2n+2}$, $A_{2n-1} > A_{2n+1}$

$\Rightarrow \alpha \neq A_i \; \forall i$, für jedes i liegt α immer echt zwischen A_i und A_{i+1}

$\Rightarrow |\alpha - A_i| < |A_{i+1} - A_i| \overset{1.4(b)}{=} \frac{1}{q_i q_{i+1}}$

$$\underbrace{\left|\overset{u}{\frac{a}{b}} - \frac{p_i}{q_i}\right|}_{\neq 0 \text{ da } \alpha \neq A_i} = \left|\frac{aq_i - bp_i}{bq_i}\right| \geq \frac{1}{bq_i} \Rightarrow \frac{1}{bq_i} \leq \frac{1}{q_{i+1} q_i} \Rightarrow b \geq q_{i+1} \overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{\scriptstyle i\to\infty} \text{ ↯ } \square$$

Wir müssen aber noch die Definition und Notation rechtfertigen:

Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ ordnen wir $[a_0; a_1, \ldots]$ zu. Dieser Kettenbruch konvergiert gegen $\tilde{\alpha}$. Noch zu zeigen: $\alpha = \tilde{\alpha}$.

Nach Konstruktion ist $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_i, \alpha_{i+1}]$, mit α_{i+1} irrational, wenn α irrational ist.

Setze $X = \alpha_{i+1}$ in 1.4 (a) ein $\overset{\text{wie bei 1.4(b)}}{\Rightarrow}$ $\alpha = \frac{p_i \alpha_{i+1} + p_{i-1}}{q_i \alpha_{i+1} + q_{i-1}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha - \frac{p_i}{q_i} = \frac{q_i(p_i \alpha_{i+1} + p_{i-1}) - p_i(q_i \alpha_{i+1} + q_{i-1})}{q_i(q_i \alpha_{i+1} + q_{i-1})} \overset{1.4(c)}{=} \frac{(-1)^i}{q_i(q_i \alpha_{i+1} + q_{i-1})}$$

$\Rightarrow |\alpha - A_i| < \frac{1}{q_i^2} \xrightarrow{i\to\infty} 0 \Rightarrow \alpha = \lim\limits_{i\to\infty} A_i$, der Grenzwert des Kettenbruchs ist tatsächlich das α, aus dem der Kettenbruch produziert wurde

Mit diesen Rechnungen und Induktion folgt auch: Die α_i sind eindeutig bestimmt und deshalb ist die Kettenbruchentwicklung einer irrationalen Zahl eindeutig.

Damit der Kettenbruch einer rationalen Zahl eindeutig wird, vereinbaren wir, daß er nicht mit $\frac{1}{1}$ enden darf.

4.6 Korollar: Jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ hat eine eindeutige Kettenbruchentwicklung.
Die Folge der Näherungsbrüche konvergiert gegen α.
α ist rational genau dann, wenn der Kettenbruch endlich ist.

1.4 und 1.5 zeigen, daß man die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ beliebig vorgeben kann ($a_0 \in \mathbb{Z}$, alle $a_i, i>0$, natürliche Zahlen): Der Kettenbruch konvergiert immer gegen eine reelle Zahl. Wir können also interessant wirkende Zahlenfolgen vorgeben und überlegen, welche reelle Zahl der Kettenbruch darstellt.

Beispiel: $[1;1,1,\ldots]$, d.h. $a_i = 1\ \forall i$. Wenn der Kettenbruch Inhalt vermittelt, sollte das eine interessante Zahl sein. (Daß die Dezimalentwicklung 1,111… die Zahl $\frac{10}{9}$ beschreibt, wirkt aber eher unspektakulär.)

Um den Grenzwert zu bestimmen, folgen wir dem Beweis, also 1.4.

Zuerst die Folgen (p_i) und (q_i):

p_i: ~~0,~~ 0, 1, danach $p_i = p_{i-1} + p_{i-2}$ ⟶ Fibonaccizahlen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$

q_i: 0, 0, 1, danach $q_i = q_{i-1} + q_{i-2}$ ⇝ auch Fibonaccizahlen, aber einen Schritt später beginnend.

$$\Rightarrow A_{i+1} = \frac{F_{i+1}}{F_i}$$

Behauptung: $A_i \xrightarrow{i\to\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (das ist der "goldene Schnitt")

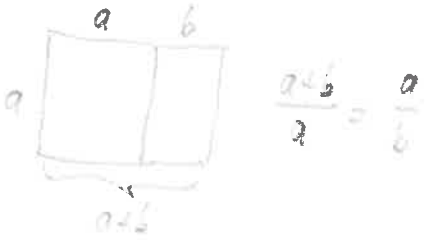
Beweis: Sei α der (nach 1.5 existierende) Grenzwert, d.h. $\frac{F_{i+1}}{F_i} \xrightarrow{i\to\infty} \underset{\substack{\neq\\ 0}}{\alpha}$.

$$\frac{F_{i+1}}{F_i} = \frac{F_i + F_{i-1}}{F_i} = 1 + \underbrace{\frac{F_{i-1}}{F_i}}_{\substack{i\to\infty \downarrow \\ 1/\alpha}} \qquad \Rightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\vee\\ 0}}{\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887$$

⇝ also eine interessante und als ästhetisch besonders angenehm geltende Zahl.



Dieser Kettenbruch ist periodisch – bedeutet das etwas?