§ 6. Arithmetische Funktionen

In den Kapiteln 1 bis 5 haben wir uns mit "elementarer Zahlentheorie" beschäftigt: Mit Fragen zu vorgegebenen Zahlen – Teilbarkeit, ggT, Kongruenzen – und danach mit Gesetzmäßigkeiten, wenn die Zahlen variieren – Lösbarkeit von Kongruenzen-Gleichungen, Legendre-Symbole, Summen von Quadraten. Das Hauptwerkzeug ist Intelligenz.

Jetzt ändern wir die Sichtweise und die Art der Fragestellung: Wie häufig kommen gewisse Eigenschaften vor – nicht als Gesetzmäßigkeiten, sondern "statistisch" gesehen. Also Fragen der folgenden Art: Wie viele Primzahlen liegen im Intervall $[1, n]$? Was ist die durchschnittliche Anzahl der Teiler einer Zahl zwischen 1 und n? Auch bei solchen Fragen braucht man Intelligenz, aber zusätzlich auch Methoden (oft sehr anspruchsvolle) aus anderen Gebieten wie Algebra oder Analysis. Zahlentheorie ist ein besonders gutes Beispiel für die Einheit der Mathematik.

In diesem Kapitel sehen wir ein Beispiel aus der "analytischen Zahlentheorie", die Methoden aus der reellen und vor allem aus der komplexen Analysis einsetzt.

Frage: Was ist die "Wahrscheinlichkeit", daß zwei natürliche Zahlen teilerfremd sind?

Um so eine Frage zu bearbeiten, müssen wir sie mathematisch präzise formulieren:

Erinnerung (2.2): Die Eulersche φ-Funktion ordnet einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $\varphi(n) := |\{\bar{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \underbrace{(a,n)}_{ggT(a,n)} = 1\}|$ zu, also die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und n.

Die Werte von $\varphi(n)$ schwanken sehr stark.

Beispiele: $n = p \Rightarrow \varphi(n) = ?$ (ziemlich groß)

$n = 2m \Rightarrow \varphi(n) \leq ?$ (deutlich kleiner)

Da wir die Primzahlen nicht genau kennen, können wir bestimmt nicht $\varphi(n)$ für alle n einfach bestimmen und ein Muster finden.

Aber das war auch nicht die Frage. Sondern: $\varphi(n)$ zählt die zu n teilerfremden Zahlen $\leq n$. Wenn wir alle $n \leq N$ (N fest) betrachten, können wir eine Idee bekommen, wie oft teilerfremde Paare von Zahlen vorkommen verglichen mit der Gesamtzahl aller Zahlenpaare. Und dann können wir versuchen zu sehen, wie dieser Anteil der teilerfremden Paare sich für $N \to \infty$ verhält, "asymptotisch" gesehen.

6.1 Theorem (Ernesto Cesàro, 1881): Die "Wahrscheinlichkeit", daß zwei natürliche Zahlen teilerfremd sind, beträgt $6/\pi^2$.

Wahrscheinlichkeit meint "asymptotische Wahrscheinlichkeit" und wird im Beweis noch formalisiert.
$6/\pi^2$ ist ungefähr 61%. Wie konnte Cesàro das ohne Computer finden?
Andererseits: würden wir mit Computern finden, daß es $6/\pi^2$ ist und nicht 61%?

Der Beweis von 6.1 füllt das ganze (relativ kurze) Kapitel. Erst formulieren wir das Problem genauer:
Sei $N \in \mathbb{N}$. Wir zählen die geordneten Paare $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq b \leq N$ und $ggT(a,b) = 1$, und vergleichen mit der Gesamtzahl aller geordneten Paare (a,b).
Gesamtzahl: Es gibt $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$ Paare (a,b) mit $1 \leq a < b \leq N$ (wähle zwei verschiedene Zahlen und nenne die kleinere a) und dann noch N Paare mit $a = b$. Insgesamt also $\frac{N(N+1)}{2}$ viele Paare.
Für festes b gibt es $\varphi(b)$ viele a mit $1 \leq a < b$ und $ggT(a,b) = 1$.
$\#$ 1
Wir wollen also die Summe $\sum_{b \leq N} \varphi(b)$ vergleichen mit $\frac{N(N+1)}{2}$.

Genauer wollen wir zeigen $\dfrac{\sum_{b \leq N} \varphi(b)}{\frac{N(N+1)}{2}} \xrightarrow{N \to \infty} \frac{6}{\pi^2}$.

Das ist die genaue Aussage von Theorem 6.1.

Wir werden zeigen: $\sum_{b \leq N} \varphi(b) = \underbrace{\frac{3N^2}{\pi^2}}_{\notin \mathbb{N}} + \text{Fehlerterm}$, und $\frac{\text{Fehlerterm}}{\frac{N(N+1)}{2}} \xrightarrow{N\to\infty} 0$

Die Beweisstrategie für 6.1 geht so:
Wir betrachten Funktionen wie φ, finden auf der Menge dieser Funktionen eine interessante algebraische Struktur und ein interessantes Rechengesetz. Dann üben wir den Umgang mit diesen Funktionen und plötzlich fällt die Konstante $\frac{6}{\pi^2}$ vom Himmel und gibt uns den entscheidenden Hinweis, wie 6.1 zu beweisen ist.

6.2 Definition: Eine Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt arithmetische Funktion (oder zahlentheoretische Funktion).
Seien f und g arithmetische Funktionen. Dann ist die punktweise Summe definiert als $f+g: n \mapsto f(n)+g(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.
Das punktweise Produkt ist definiert als $f \cdot g: n \mapsto f(n)g(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.
Die (Dirichlet-) Faltung ist definiert als

$$f * g: n \mapsto (f*g)(n) := \sum_{d \mid n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{d_1, d_2: \\ d_1 \cdot d_2 = n}} f(d_1)\, g(d_2)$$

Beispiele: Teilerfunktion $d: n \mapsto d(n) := |\{d : d \mid n\}| = (a_1+1) \cdot \ldots \cdot (a_e+1)$

wenn $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_e^{a_e}$

Eulersche φ-Funktion

Nullfunktion $0: n \mapsto 0(n) := 0 \ \forall n$

δ-Funktion $\delta: n \mapsto \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Faltung ist eine interessante Operation und algebraisch sinnvoll:

6.3 Proposition: Die Menge $\mathcal{A}$ der arithmetischen Funktionen mit punktweiser Addition und mit Multiplikation durch Dirichlet-Faltung ist ein kommutativer Ring. Die Nullfunktion ist das neutrale Element der Addition, die δ-Funktion ist das neutrale Element der Multiplikation.

Beweis: Addition ✓

Multiplikation: $(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) = \underset{?}{\sum} g(\frac{n}{d})f(d) = (g*f)(n)$

$((f*g)*h)(n) = \sum_{de=n}(f*g)(d)\,h(e) = \sum_{de=n}\sum_{d_1d_2=d} \; ? = \dots = (f*(g*h))(n)$

distributiv: ?

$(f*\delta)(n) = \sum_{d|n} f(d)\,\delta(\frac{n}{d}) = f(n)\cdot\delta(1) = f(n) = (\delta*f)(n)$ ☐

Die punktweise Multiplikation verwenden wir für eine andere Struktur.
Sei $L: \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ die Abbildung $n\longmapsto L(n) := \log n$ (natürlicher Logarithmus).
L ist eine arithmetische Funktion, mit der wir punktweise multiplizieren können.

6.4 Proposition: Sei $D: \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ die Abbildung, die das punktweise Produkt mit L bildet, also $f\mapsto L\cdot f = f\cdot L : n\mapsto L(n)\cdot f(n)$. Dann ist D eine Derivation von $\mathcal{A}$, d.h. D erfüllt: $D(f*g) = D(f)*g + f*D(g)$ $\forall f,g\in\mathcal{A}$.

Beweis: Für $n = de$ gilt $L(d\cdot e) = L(d) + L(e)$.

Seien $f,g\in\mathcal{A}$, z.z. $\underbrace{D(f*g)}_{\substack{\shortparallel\\ L\cdot(f*g)}} = \underbrace{D(f)*g}_{\substack{\shortparallel\\ (L\cdot f)*g}} + \underbrace{f*D(g)}_{\substack{\shortparallel\\ f*(L\cdot g)}}$ ($*$ ist das Produkt in $\mathcal{A}$, Faltung) ($\cdot$ ist punktweises Produkt)

Auswerten an $n = d\cdot\frac{n}{d}$: $L\cdot(f*g) = L(n)\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d}) =$

$$= \sum_{d|n}\left(L(d) + L(\tfrac{n}{d})\right)f(d)g(\tfrac{n}{d})$$

$$= \sum_{d|n}\underbrace{(L(d)f(d))}_{=(L\cdot f)(d)}g(\tfrac{n}{d}) + \sum_{d|n} f(d)\underbrace{(L(\tfrac{n}{d})g(\tfrac{n}{d}))}_{=(L\cdot g)(\frac{n}{d})}$$ ☐

Eine besonders wichtige arithmetische Funktion stammt von August Ferdinand Möbius (1790–1868), der auch für das Möbiusband verantwortlich ist. Verschiedene Möbius-Transformationen sind auch nach ihm benannt.

6.5 Definition: Die Möbius-Funktion $\mu \in \mathcal{A}$ ist definiert als

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & n=1 \\ (-1)^k, & n = p_1 \cdots p_k \text{ falls } p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j, \text{ alle prim} \\ 0, & \text{sonst (d.h. } \exists p \text{ prim mit } p^2 \mid n) \end{cases}$$

Die interessanten n sind also die mit quadratfreier Primfaktorzerlegung.

Beispiele:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	?	0	-1	?	?	?	?	1

Noch eine harmlos wirkende arithmetische Funktion

$$1 : n \mapsto 1(n) = 1 \ \forall n$$

Das ist nicht das Einselement in $\mathcal{A}$ (das war ja δ), aber erstaunlich interessant:

6.6 Proposition: (a) Die Möbiusfunktion ist multiplikativ:

$$\mu(ab) = \mu(a)\mu(b) \quad \forall a,b \in \mathbb{N} \text{ mit } ggT(a,b)=1$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Das bedeutet: $\mu * 1 = \delta$, die Möbiusfunktion μ ist in $\mathcal{A}$ invertierbar und ihr Inverses ist die konstante Funktion 1.

(Achtung: μ ist nicht streng multiplikativ, was heissen würde: $\mu(ab) = \mu(a)\cdot\mu(b)$ $\forall a,b$ ohne Voraussetzung.)
streng = strikt multiplikativ

Beweis: (a) ✓

(b) $n=1$ ✓

Sei $n \geq 2$, zz $\sum_{d\mid n} \mu(d) = 0$. Sei $n = p_1^{a_1} \cdots p_e^{a_e}$ und $q := p_1 \cdots p_e$, der größte quadratfreie Teiler von n (vielleicht $q = n$).

Sei $d \mid n$. Entweder $\exists p$ prim mit $p^2 \mid d$. Dann ist $\mu(d) = 0$ und liefert keinen Beitrag zur Summe.

Oder $d \mid q$ – und nur diese d liefern Beiträge zur Summe. So ein d hat die Form $d = p_1^{\varepsilon_1} \cdots p_e^{\varepsilon_e}$ mit $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ und jedes ε_i ist möglich.

Ein d mit genau j Primteilern erhalten wir, indem wir j viele $\varepsilon_i = 1$ setzen, d.h. j aus den ℓ Primzahlen $p_1, \dots, p_\ell$ auswählen. Es gibt $\binom{\ell}{j}$ mögliche Wahlen. Und so ein d hat μ-Wert $\mu(d) = (-1)^j$.

$$\Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|q} \mu(d) = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{\substack{d:d|q \\ j \text{ Primteiler}}} (-1)^j = \sum_{j=0}^{\ell} (-1)^j \cdot \binom{\ell}{j} = (1-1)^\ell = 0 \qquad \square$$

Das hat eine nützliche Konsequenz: Sei f irgendeine arithmetische Funktion. Daraus bilden wir eine neue Funktion $g := f * 1$. Dann können wir f aus g zurückgewinnen: $g * \mu = f * 1 * \mu = f * \delta = f$.
In Formeln sieht das gar nicht so harmlos aus:

6.7 Theorem (Möbiussche Umkehrformel):

(a) Sei f eine arithmetische Funktion und sei g definiert durch
$$g(n) := \sum_{d|n} f(d). \quad \text{Dann gilt: } f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\tfrac{n}{d}\right) g(d).$$

(b) Sei g eine arithmetische Funktion und sei f definiert durch
$$f(n) := \sum_{d|n} \mu\left(\tfrac{n}{d}\right) g(d). \quad \text{Dann gilt: } g(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Beweis: (a) Nach Definition ist $g = f * 1$, also $f = g * \mu$.

(b) analog? $\square$

Zur Möbiusfunktion kommen wir gleich wieder zurück. Zuvor führen wir noch Notation ein, um das Wachstum von Funktionswerten vergleichen zu können, und was es heißt, daß zwei Funktionen "asymptotisch gleich" sind.

Die beiden Symbole O ("gross O") und o ("klein O") werden Landau-Symbole genannt,
Buchstaben, nicht Zahl

nach dem Zahlentheoretiker Edmund Landau.

6.8 Definition: Sei f eine reellwertige Funktion und g eine Funktion mit Werten in $\mathbb{R}_+ = \mathbb{R}_{>0}$.

(a) Man schreibt $f(x) = O(g(x))$ („$f(x)$ ist groß-O von $g(x)$") :⟺
$\exists$ Konstante k mit $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le k$ für x groß, d.h. $\limsup\limits_{x\to\infty} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$

(b) Man schreibt $f(x) = o(g(x))$ („$f(x)$ ist klein-o von $g(x)$") :⟺
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

(c) Man schreibt $f(x) \sim g(x)$ („$f(x)$ ist asymptotisch gleich $g(x)$") :⟺
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$

(Die Definitionsbereiche von f und g sind so auszuwählen, daß die Bezeichnungen sinnvoll sind, also z.B. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}_+$ oder $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ oder...)

Beispiele:
$2x+1 = O(x)$
$x^5 = O(e^x)$
$f(x) = O(1)$ bedeutet $f(x)$ ist beschränkt für x groß
$\sqrt{x} = o(x)$
$x^5 = o(e^x)$
$f(x) = o(1)$ bedeutet $f(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$
$x \sim x+1$

Wir definieren jetzt zwei Funktionen von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}$, die „Durchschnitte" der Werte der Möbiusfunktion bilden, und schätzen ihr Wachstum ab.

Sei $f_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum\limits_{n\le x} \frac{\mu(n)}{n}$

und $f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum\limits_{n\le x} \frac{\mu(n)}{n^2}$

(da es ums Wachstum geht, ist es egal, wie man das für $x<1$ definiert)

Experimentieren Sie mit einigen Werten und versuchen Sie, das Wachstumsverhalten von f_1 und f_2 zu erraten.

6.9 Theorem: (a) $f_1(x) = \mathcal{O}(1)$.
(b) $f_2(x) = \frac{6}{\pi^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{x})$.

Das sagt also: f_1 ist beschränkt für x groß.

Und $\exists k$: $\left| \frac{f_2(x) - \frac{6}{\pi^2}}{\frac{1}{x}} \right| \leq k$ für x groß, d.h. $|f_2(x) - \frac{6}{\pi^2}| \leq \frac{k}{x}$ für x groß.

Jetzt ist $\frac{6}{\pi^2}$ aufgetaucht.

Vor dem Beweis ein Lemma:

6.10 Lemma: Sei f eine arithmetische Funktion und sei F definiert durch $F(x) := \sum_{n \leq x} f(n)$. Dann gilt $\sum_{m \leq x} F(\frac{x}{m}) = \sum_{d \leq x} f(d) \, [\frac{x}{d}] = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} f(d)$

$[\frac{x}{d}]$: größte ganze Zahl $\leq \frac{x}{d}$

Beweis: $$\sum_{m \leq x} F(\frac{x}{m}) = \sum_{m \leq x} \sum_{d \leq \frac{x}{m}} f(d)$$
$$= \sum_{\substack{d,m: \\ dm \leq x}} f(d)$$
$$= \sum_{d: d \leq x} \Big(f(d) \cdot \sum_{m: m \leq \frac{x}{d}} 1\Big)$$
$$= \sum_{d: d \leq x} f(d) \, [\tfrac{x}{d}]$$ $\Rightarrow$ erste Gleichung

und $\sum_{d,m: dm \leq x} f(d) = \sum_{\substack{n \leq x \\ d: d|n}} f(d)$ $\Rightarrow$ zweite Gleichung □

Beweis von 6.9: (a) ist der einfache Teil. Wir wenden 6.10 an auf $f = \mu$.

Also $F(x) = M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \overset{6.10}{\Rightarrow} \sum_{m \leq x} M(\frac{x}{m}) = \sum_{d \leq x} \mu(d) \, [\frac{x}{d}] =$

großes μ

$$= \sum_{n \leq x} \underbrace{\sum_{d: d|n} \mu(d)}_{\text{nach 6.6: } 1,\, n=1;\; 0,\, n>1} = 1 \quad (\text{für } x \geq 1)$$

Was hilft uns das? $\sum_{d\le x} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right] = x \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d\le x} \underbrace{\left\{\frac{x}{d}\right\}}_{:= \underbrace{\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{d}\right]}_{<1}} =$

$$= x \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d} + O(x)$$

$\Rightarrow x \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d} + O(x) = 1$

bei solchen Manipulationen sollte man nachprüfen, daß sie erlaubt sind

$\Rightarrow x \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d} = O(x)$

$\Rightarrow \sum_{d\le x} \frac{\mu(d)}{d} = O(1)$, also $f_1 = O(1)$

(b) ist der schwierige Teil. Die wesentliche Aufgabe ist es, einen Wert der Riemannschen ζ-Funktion auszurechnen, die wir in 1-8 gesehen hatten: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ (für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\, s > 1$). $\zeta(s)$ ist wohldefiniert, die Reihe konvergiert für s mit $\mathrm{Re}\, s > 1$ und insbesondere für $s \in \mathbb{R}_{>1}$, sogar absolut.

Sei $G(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$, das konvergiert auch absolut (für dieselben s), wegen $|\mu(n)| \le 1 \ \forall n$.

$\Rightarrow \zeta(s)\, G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{(kd)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \underbrace{\sum_{d|n} \mu(d)}_{6.6 \text{ anwenden}} = 1$

(wo wird absolute Konvergenz verwendet und wo das Cauchy-Produkt von Reihen?)

$\Rightarrow \zeta(s) = \frac{1}{G(s)}$, $\frac{1}{\zeta(s)} = G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$

Uns interessiert: $G(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2}$

Wir werden zeigen: $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (*)

Damit folgt: $\left| \sum_{n\le x} \frac{\mu(n)}{n^2} - \frac{6}{\pi^2} \right| = \left| \sum_{n>x} \frac{\mu(n)}{n^2} \right| < \sum_{n>x} \frac{1}{n^2} \underset{\text{warum?}}{<} \frac{1}{x} \int_x^{\infty} \frac{1}{y^2}\, dy = -\frac{1}{y}\Big|_x^{\infty} = \frac{1}{x}$

also die Behauptung.

Euler war der erste, der (*) beweisen konnte. Inzwischen gibt es viele Beweise. Vielleicht kennen Sie einen aus der Analysis?

Ein Beweis von (*) mit komplexer Analysis:

Setze $z \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < \pi$, $z \cdot \cot(z) = z \cdot \frac{\cos z}{\sin z} = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^2}{k^2\pi^2 - z^2} =$

$= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) \frac{z^{2k}}{\pi^{2k}}$

↑ Potenzreihe ↑ geometrische Reihe verwenden

Außerdem ist $z \cot z = iz \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = iz + \frac{2iz}{e^{2iz} - 1} =$

$= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \frac{(2iz)^k}{k!}$, B_k sind die Bernoulli-Zahlen

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}$ (**)

Also muß man die Bernoullizahlen ausrechnen, z.B. durch

$s_k(n) := 1^k + \ldots + (n-1)^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j n^{k+1-j}$

$n=1$: $s_k(1) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j = 0$ ⤳ rekursive Formel für die B_j.

$B_0 = 1$

Rekursion: $k=1$, $\binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0$

$\Rightarrow 1 + 2B_1 = 0$, $B_1 = -\frac{1}{2}$

(Achtung: in der Literatur wird manchmal anders normiert)

Dann $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$ usw

Die Bernoulli-zahlen kommen auch in der Potenzreihenentwicklung (= Taylorentwicklung) von $\frac{z}{e^z - 1}$ vor, für $|z| < 2\pi$: $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$

Aus (**) folgt damit: $\zeta(2) = (-1)^{1+1} \frac{(2\pi)^2}{2 \cdot 2!} \cdot B_2 = \frac{\pi^2}{6}$

(und analog $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$,

$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$, ...) □

Die Werte $\zeta(2k)$ sind alle transzendent, weil π^{2k} transzendent ist.

Über $\zeta(2k+1)$ weiß man wenig. 1979 zeigte Apéry, daß $\zeta(3)$ irrational ist.

Rivoal (2000): unendlich viele $\zeta(2k+1)$ sind irrational.

Zudilin (2001): mindestens eine der Zahlen $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ ist irrational

Fischler, Sprang und Zudilin (2019): $\forall \varepsilon > 0\ \exists s$: mindestens $2^{(1-\varepsilon) \cdot \frac{\log s}{\log \log s}}$ viele $\zeta(2k+1)$ sind irrational für $3 \le 2k+1 \le s$

Ein Beweis von (*) mit reeller Analysis:

Sei $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\,dx \rightsquigarrow I_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$

Sei $J_n = \int_0^{\pi/2} x^2\cos^{2n} x\,dx$

$n>0$, partielle Integration: $I_n = \ldots = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$

$$\rightsquigarrow \frac{\pi}{4n^2} = \frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{2n!}J_n$$

$$\rightsquigarrow \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \underset{\pi^3/24}{\overset{\shortparallel}{J_0}} - \underbrace{\frac{4^N(N!)^2}{(2N)!}J_N}_{\downarrow N\to\infty \atop 0}$$

wegen $J_N < \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cos^{2N} x\,dx = \frac{\pi^2 I_N}{8(N+1)}$

$\uparrow$ $x < \frac{\pi}{2}\sin x$ für $0<x<\frac{\pi}{2}$

(Matsuoka, 1961)

Ein Beweis von (*) mit Fourieranalysis/Funktionalanalysis:

Die Funktionen $e_n(x) = e^{2\pi i n x}$ ($n\in\mathbb{Z}$) bilden ein vollständiges orthonormales System in $L^2[0,1]$. Parsevals Formel: $\langle f,f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\langle f,e_n\rangle|^2$, wobei $\langle\,,\rangle$ das "Skalarprodukt" ist, für $f\in L^2[0,1]$.

Wähle $f(x)=x \rightsquigarrow \langle f,f\rangle = \frac{1}{3}$, $\langle f,e_0\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle f,e_n\rangle = \frac{1}{2\pi i n}$ für $n\neq 0$

$$\underset{\text{Parseval}}{\Longrightarrow} \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \sum_{n\in\mathbb{Z} \atop n\neq 0}\frac{1}{4\pi^2 n^2}$$

Theorem 6.9 ist jetzt also bewiesen, und wir erinnern uns an unser eigentliches Ziel, Theorem 6.1. Dafür sollten wir etwas über die Eulersche φ-Funktion beweisen.

Nach 2.4 ist $\varphi(n = p_1^{a_1}\cdots p_\ell^{a_\ell}) = (p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1})\cdots(p_\ell^{a_\ell}-p_\ell^{a_\ell-1}) =$

$$= p_1^{a_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots p_\ell^{a_\ell}\left(1-\frac{1}{p_\ell}\right) = n\cdot\prod_{p|n \atop p\text{ prim}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

Auch nach 2.4: $n = \sum_{d|n}\varphi(d)$

Wir wählen $f(n)=\varphi(n)$ und erhalten $g(n)=n$ $\forall n$ in der Situation von 6.7.

$$\overset{6.7}{\Longrightarrow} \varphi(n) = f(n) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d) = \sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)d = \sum_{d,d': \atop d\cdot d'=n}\mu(d)d' = \sum_{d|n}\mu(d)\cdot\frac{n}{d} = n\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$$

6.11 Proposition: Für $x \geq 1$ sei $\Phi(x) := \sum_{n \leq x} \varphi(n)$. Dann gilt:

$$\Phi(x) = \frac{3x^2}{\pi^2} + \mathcal{O}(x \underset{\log x}{\overset{u}{\ln x}})$$

$$\left(\text{vergleiche: } \sum_{n \leq x} n = \frac{[x]([x]+1)}{2} \sim \frac{x^2}{2}\right)$$

Beweis:
$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} \varphi(n) \overset{\text{wie oben}}{=} \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d,d' \\ dd'=n}} d' \mu(d) = \sum_{d \leq x} \mu(d) \underbrace{\sum_{d' \leq \frac{x}{d}} d'}_{= \sum_{e \leq [\frac{x}{d}]} e} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{d \leq x} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right] \left(\left[\frac{x}{d}\right]+1\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{d \leq x} \mu(d) \left(\left(\frac{x}{d}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} \underbrace{\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2}}_{6.9(b):\ \frac{6}{\pi^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{x})} + \mathcal{O}(x \underbrace{\sum_{d \leq x} \tfrac{1}{d}}) \quad \text{weil } \mu(d) \in \{1,0,-1\}$$

das können wir auch abschätzen: $\int_1^x \frac{1}{y}\, dy = \ln x$

$$\Rightarrow \Phi(x) = 3 \frac{x^2}{\pi^2} + \underbrace{\frac{x^2}{2} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\mathcal{O}(x) < \mathcal{O}(x \cdot \ln x)} + \mathcal{O}(x \cdot \ln x) = 3\frac{x^2}{\pi^2} + \mathcal{O}(x \ln x) \quad \square$$

Endlich: Beweis von 6.1, zz (6.3 oben): $\sum_{b \leq N} \varphi(b) = \frac{3N^2}{\pi^2} + \text{Fehlerterm}$
und $\text{Fehlerterm} / \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow{N \to \infty} 0$

Nach 6.11 ist $\sum_{b \leq N} \varphi(b) = \Phi(N) = \frac{3N^2}{\pi^2} + \mathcal{O}(N \ln N)$

und
$$\frac{\frac{3N^2}{\pi^2} + \mathcal{O}(N \ln N)}{N(N+1)/2} = \frac{6}{\pi^2} - \underbrace{\frac{6}{\pi^2(N+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln N}{N+1}\right)}_{\downarrow N \to \infty \atop 0} \xrightarrow{N \to \infty} \frac{6}{\pi^2} \quad \square$$