Aufgaben zu Kettenbrüchen

(1) Sei α irrational und $\frac{p_n}{q_n}$ der n-te Näherungsbruch. Dann gilt

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} \le \frac{1}{q_n^2}.$$

Sei umgekehrt $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$ für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \ge 1$, dann ist $\frac{p}{q}$ einer der Näherungsbrüche von x.

(2) Gegeben ist die diophantische Gleichung $ax+by=c$ mit $ggT(a,b) \mid c$ (sonst gibt es keine Lösung) und $ggT(a,b)=1$ (sonst können wir durch $ggT(a,b)$ teilen).
Aus einem Lösungspaar für $ax+by=\overset{c}{\cancel{1}}$ kann man immer eines für ~~ac~~ $ax+by=1$ erzeugen, deshalb sei nun $c=1$.
Sei $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$.
Für n ungerade ist $(q_{n-1}, -p_{n-1})$ ein Lösungspaar, für n gerade ist ist $(-q_{n-1}, p_{n-1})$ ein Lösungspaar.
Wie sieht die allgemeine Lösung aus?
Und im Spezialfall $172x + 20y = 1000$?

(3) Bestimmen Sie den Kettenbruch von $\sqrt{23}$.

(4) Bestimmen Sie eine rationale Zahl, die e auf 4 Dezimalstellen genau approximiert.

(5) Sei $d \in \mathbb{N}$, kein Quadrat. Wir betrachten die diophantische Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$

(a) Sei (p,q) eine positive Lösung (d.h. $p,q>0$). Dann ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch in der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{d}$.

(b) Sei $\frac{p}{q}$ ein solcher Näherungsbruch. Dann gilt $\cancel{x^2-dy^2=k}$ $p^2 - dq^2 = k$ mit $|k| < 1 + 2\sqrt{d}$

(c) Seien s_m und t_m rekursiv definiert durch

$$s_0 = 0, \; s_{m+1} = a_m t_m - s_m \qquad \text{für } m \in \mathbb{N}_0$$
$$t_0 = 1, \; t_{m+1} = (d - s_{m+1}^2)/t_m$$

- Dann sind alle s_m und t_m in $\mathbb{Z}$, alle $t_m \neq 0$.
- $t_m \mid (d - s_m^2)$
- Wo kommt $\cancel{(d-s_{m+1})}$ $(s_m + \sqrt{d})/t_m$ in der Kettenbruchentwicklung vor?

(d) Für die Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$ gilt $p_n^2 - dq_n^2 = (-1)^{n+1} \underbrace{t_{n+1}}_{>0}$, $n \geq 0$

(e) Sei ℓ die Periodenlänge. Dann ist $t_j = 1$ genau für $\ell \mid j$.

(f) Ist ℓ gerade, dann sind die positiven Lösungen gegeben durch
$$(p_{k\ell-1}, q_{k\ell-1}), \; k \in \mathbb{N}.$$
Ist ℓ ungerade, —"— durch $(p_{2k\ell-1}, q_{2k\ell-1})$, $k \in \mathbb{N}$.

(g) Bestimmen Sie die kleinste positive Lösung von
$$x^2 - 92y^2 = 1$$
(Brahmagupta, 7. ~~Jahh~~ Jahrh.: "wer diese Gleichung innerhalb eines Jahres lösen kann, ist ein Mathematiker")

(6) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, sodaß n und $3n-2$ Quadratzahlen sind.
Was hat das mit $\sqrt{3}$ zu tun?