Elementare aber nicht unbedingt leichte Aufgaben

Statt Zahlen als Summen von Quadraten zu schreiben, kann man allgemeiner Exponenten $k \geq 2$ nehmen („Warings Problem") oder Quadrate und Kuben mischen oder (etwa bei Kuben) auch negative Zahlen zulassen.
Bei nicht negativen Kuben ist das Problem gelöst: 23 und 239 (z.B.) sind Summen von neun Kuben (aber nicht weniger) und Arthur Wieferich hat gezeigt, daß es mit neun Kuben immer geht („Beweis des Satzes, daß sich eine jede ganze Zahl als Summe von höchstens neun positiven Kuben darstellen läßt", Mathematische Annalen, 1908).

Wir ändern die Regeln und betrachten Kuben von ganzen Zahlen (negativ erlaubt).

(1) (a) Jede durch 6 teilbare ganze Zahl ist eine Summe von 4 Kuben:

$$6t = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \text{ für } a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

(b) Jede ganze Zahl kann auf unendlich viele $\mathbb{Z}$ Arten als Summe von fünf Kuben ganzer Zahlen geschrieben werden.

(c) Die Zahl 3 läßt sich auf unendlich viele Weisen als Summe von vier Kuben ganzer Zahlen $\neq 0, 1$ schreiben.

(2) (a) Was ist die kleinste natürliche Zahl >2, die eine Summe von zwei Quadraten natürlicher Zahlen ist, und eine Summe von zwei Kuben natürlicher Zahlen?

(b) Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen n von der Form $n = a^2 + b^2$, $a, b \in \mathbb{N}$, $ggT(a, b) = 1$ und $n = c^3 + d^3$, $c, d \in \mathbb{N}$, $ggT(c, d) = 1$.

(3) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ der Form $n \neq a^3 + b^3$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $n = c^3 + d^3$, $c, d \in \mathbb{Q}$, $c, d > 0$

(4) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ der Form $n = a^3 - b^3$, $a, b \in \mathbb{N}_0$, $n \neq c^3 + d^3$, $c, d \in \mathbb{N}_0$.