Zwei irrationale Zahlen

(Beweise zum Ausarbeiten)

Sei $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{e} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ warum konvergiert die Reihe?

Behauptung: e ist irrational, d.h. $e \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Beweis: Angenommen $e \in \mathbb{Q}$, also $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow e = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ warum ist das erlaubt?

$$\Rightarrow \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \Big| \cdot q!$$

$$\Rightarrow p(q-1)! - \sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$

$$< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots = \frac{1}{q}$$

genaue Begründungen

$\lightning$ warum? $\square$

Behauptung: π ist irrational, d.h. $\pi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Beweis: Angenommen $\pi \in \mathbb{Q}$, also $\pi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$. Also $[0, \pi] = [0, \frac{a}{b}]$

Für $n \in \mathbb{N}$ (später genauer festzulegen) und $x \in [0, \pi]$ sei

$$f(x) := \frac{b^n x^n (\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!}$$

$$F(x) := f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$$

Dann ist $f^{(k)}(0) = 0$ für $0 \le k \le n-1$ warum?

Außerdem ist $f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=n}^{2n} \underbrace{\binom{n}{k-n}}_{\text{Binomialkoeffizient}} a^{2n-k} (-b)^{k-n} x^k$ warum?

$$\Rightarrow f^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} \binom{n}{k-n} a^{2n-k} (-b)^{k-n}$$

für $n \le k \le 2n$, und diese Zahlen sind in $\mathbb{Z}$

nachprüfen

$f(x) = f(\pi - x) \Rightarrow$ analog für $x=\pi$ statt $x=0$.

f und F sind differenzierbar und $F'(x)\sin x - F(x)\cos x$ auch warum?

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right] = F''(x)\sin x + F(x)\sin x$$
$$= f(x)\sin x$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \left[F'(x)\sin x - F(x)\cos x\right]_0^\pi = F(\pi) + F(0)$$

$\Rightarrow F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z}$ warum?

Für $x \in (0,\pi)$ ist $f(x)\sin x > 0$ und $f(x) \leq f(\pi/2)$ nachprüfen

$$\Rightarrow 0 < f(x)\sin x \leq f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{\pi a}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \ \lightning \qquad \square$$

(Dieser Beweis wurde 1947 von Ivan Niven veröffentlicht.)

Welche Definition von π wurde in diesem Beweis verwendet?

Eine Zahl, von der man nicht weiß, ob sie rational oder irrational ist, ist die Euler-Mascheroni-Konstante

$$\gamma_e := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) \in \mathbb{R}$$

Hinweis zur Konvergenz: Teleskopsumme

Noch eine Zahl, von der man nicht weiss, ob sie rational oder irrational ist:

$$\mathbb{Q} \overset{\text{warum}}{\ni} \left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}, \text{ aber } \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} ?$$

$2^{\sqrt{2}}$ ist irrational, sogar transzendent (also keine Nullstelle eines Polynoms in $\mathbb{Q}[x]$) nach dem Satz von Gelfond-Schneider.

$\Rightarrow \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrational

warum?

Ohne das zu wissen, kann man aber zeigen:

(1) Eine irrationale Zahl hoch eine irrationale Zahl kann rational sein.

(2) Eine irrationale Zahl hoch eine irrationale Zahl kann irrational sein.

Beweise? (Es muß kein explizites Beispiel angegeben werden)

Eine transzendente Zahl

Eine reelle Zahl α heißt algebraische Zahl $\Leftrightarrow \exists\, f(x) \in \mathbb{Q}[x], f \neq 0$, so daß $f(\alpha) = 0$. Wenn nicht, heißt α eine transzendente Zahl.

Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar warum?

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

$\Rightarrow$ Es gibt transzendente Zahlen.

Können wir ein Beispiel sehen? Wie kann man konkret nachweisen, daß bestimmte Zahlen transzendent sind. Gibt es Eigenschaften, aus denen man schliessen kann, daß ein bestimmter α nicht algebraisch sein kann?

Theorem (Liouville): Sei α eine algebraische Zahl, deren Minimalpolynom Grad $n \geq 2$ hat. Dann existiert $c \in \mathbb{R}_{>0}$ so daß für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{|q|^n}$$

(Die Voraussetzung bedeutet $\alpha \notin \mathbb{Q}$, was offenbar nötig ist.)

Beweis: Sei α algebraisch mit Minimalpolynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad $n \geq 2$, $f(\alpha) = 0$. d.h. minimal, Höchstkoeffizient $= 1$

Die Ableitung f' erfüllt $f'(\alpha) \neq 0$ warum?

Definition Ableitung $\Rightarrow \exists\, \delta > 0\ \forall \frac{p}{q} : \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq \delta \Rightarrow \left|\frac{f(\frac{p}{q}) - f(\alpha)}{\frac{p}{q} - \alpha}\right| < 2|f'(\alpha)|$ noch prüfen

$\exists\, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0 : f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{b}{q^n}$ warum?

sogar $b \in \mathbb{Z}$ warum?

$\Rightarrow \left|f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{|q|^n}$

Für $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq \delta$ folgt: $\frac{1}{|q|^n} < 2|f'(\alpha)| \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|$

und für $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \delta$ ist $\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{\delta}{|q|^n}$

Wähle $c := \min\left(\delta, \frac{1}{2|f'(\alpha)|}\right)$ $\square$

Eine reelle Zahl α heißt <u>Liouville-Zahl</u> $:\Leftrightarrow$ $\forall c>0\ \forall n\geq 2:$ ($\alpha \notin \mathbb{Q}$)
$\exists \frac{p}{q}\in\mathbb{Q}:\ |\alpha-\frac{p}{q}|\leq \frac{c}{|q|^n}$

Alle Liouville-Zahlen sind transzendent.

Zeigen Sie:

α ist eine Liouville-Zahl $\Leftrightarrow$ $\forall N\in\mathbb{N}\ \exists \frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ q\geq 2$ so daß

$$0<|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{q^N}$$

Sei $\alpha:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{10^{k!}}$. Zeigen Sie: $\alpha\in\mathbb{R}$, α ist eine Liouville-Zahl

Sei $a\in\mathbb{N}$, $a\geq 2$, $b_0<b_1<b_2<\ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim_{k\to\infty}(b_{k+1}/b_k)=\infty$, und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge natürlicher Zahlen.

Sind alle Zahlen $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^{b_k}}$ und $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{a^{b_k}}$ Liouville-Zahlen?

Beweis oder Gegenbeispiel

Die Menge der Liouville-Zahlen hat als Teilmenge von $\mathbb{R}$ Lebesgue-Maß 0.
Mahler (1953): Für $q\geq 2$ ist $|\pi-\frac{p}{q}|>q^{-42}$, also ist π keine Liouville-Zahl. e ist auch keine.

Sei $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $p(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0$, und sei
$h(p) := \max_i |a_i|$

d.h. das Minimalpolynom hat Grad n

Theorem: Sei α algebraisch mit Grad n und $p(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, so daß $P(\alpha) \neq 0$. Dann $\exists\, c_\alpha > 0$: $|P(\alpha)| > \frac{(c_\alpha)^d}{h(p)^{n-1}}$

c_α hängt nur von α ab.

Beweisen Sie das Theorem.

Leiten Sie den Satz von Liouville als Spezialfall ab.