Aufgaben zu Teilbarkeit und Primzahlen (manchmal helfen Tricks mehr als Theorie)

(1) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$ sodaß $n+1 \mid n^2+1$.

(2) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{Z}$ so daß $a-3 \mid a^3-3$.

(3) Zeigen Sie daß $13 \mid 2^{70}+3^{70}$.

(4) (a) Gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n \mid 2^n+1$?
(b) Gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $n \mid 2^n-1$?
(c) Wieviele ungerade $n \in \mathbb{N}$ gibt es mit $n \mid 3^n+1$?

(5) Bestimmen Sie alle Primzahlen, die sowohl eine Summe von zwei Primzahlen sind als auch eine Differenz.

(6) Bestimmen Sie alle Primzahlen p, q und r, so daß
$p(p+1)+q(q+1)=r(r+1)$.

(7) Zwei Primzahlen $p<q$ heißen Primzahlzwillinge, wenn $q=p+2$.
Suchen Sie nach einigen Beispielen.
(a) Bestimmen Sie alle Primzahlzwillinge, die nicht von der Form $(6n-1, 6n+1)$ sind.
(b) Zeigen Sie, daß es unendlich viele Paare (p,q) von Primzahlen gibt, die keine Primzahlzwillinge sind, aber benachbart (d.h. zwischen p und q liegt keine Primzahl).

(Es wird vermutet, daß es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Mehr zu diesem Thema z.B. auf wikipedia und in Terence Taos "~~Bound~~ " Bounded gaps between primes (Polymath 8) – a progress report", wo die Komplexität dieser Frage sichtbar wird.)