

Aufgaben zu den Kapiteln 1 und 2

- (1) (a) Bestimmen Sie die Primteiler der Zahl 30.
 (b) Zeigen Sie: $\forall n \in \mathbb{N}: 30 \mid (n^5 - n)$.
- (2) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := a^{2^n} + 1$, wobei $a \in \mathbb{N}$ fest gewählt ist.
 (a) Zeigen Sie: für $n < e$ gilt: $A_n \mid (A_e - 2)$.
 (b) Bestimmen Sie $\text{ggT}(A_n, A_e)$.
 (c) Zeigen Sie, daß es unendlich viele Primzahlen gibt.
- (3) Seien $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}$ und $b_1, b_2 := b_1 + 1, b_3 := b_2 + 1, \dots, b_m \in \mathbb{N}$.
 Zeigen Sie: $\exists! j: b_j \equiv a \pmod{m}$
 und $\forall n: m \mid (n-1) \mid (n-2) \mid \dots \mid (n-m)$
- (4) Sei $p(x) = 3x + 5x^2 + 7x^3$. Bestimmen Sie alle Nullstellen von $p(x)$ in $\mathbb{Z}/210\mathbb{Z}$.
- (5) (a) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die Eulersche φ -Funktion an n den Wert $\varphi(n) = 1$ annimmt. Ebenso für $\varphi(n) = 2$ und für $\varphi(n) = 4$.
 (b) Zeigen Sie: für $n \geq 3$ ist $\varphi(n)$ eine gerade Zahl.