Weitere Aufgaben zu Kettenbrüchen

(1) Ein Jahr hat ungefähr 365,24219 Tage. Der Julianische Kalender approximiert das durch einen zusätzlichen Tag alle 4 Jahre, der Gregorianische Kalender durch 97 zusätzliche Tage alle 400 Jahre. Warum wäre es besser, alle 128 Jahre 31 zusätzliche Tage einzufügen?

(2) Sei $1 < b_1 < b_0$. Dann ist $\log_{b_0} b_1 = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots}}}$

Basis

wobei $n_1, n_2, \dots$ wie folgt definiert werden:

$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1}$, $b_2 = b_0 / b_1^{n_1}$

$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}$, $b_3 = b_1 / b_2^{n_2}$

$\vdots$

Warum funktioniert das? Und was ist $\log_{10} 2$?

(3) Die Fibonacci-Zahlen sind wie üblich durch die Rekursion $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ definiert mit $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$.
Die Lucas-Zahlen L_n analog durch dieselbe Rekursion $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, aber mit $L_0 = 2$ und $L_1 = 1$. (François Édouard Anatole Lucas, 19. Jh)
Der goldene Schnitt ist $\phi = \lim_{n \to \infty} F_n / F_{n-1}$.

(a) Zeigen Sie: $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ (für $n > 0$)

$\phi^k = \lim_{n \to \infty} F_n / F_{n-k}$, $\phi^{k+2} = \phi^{k+1} + \phi^k$

(b) Zeigen Sie: $F_n / F_{n-3} = 4 + \dfrac{1}{F_{n-3}/F_{n-6}}$.

Bestimmen Sie den Kettenbruch von ϕ^3.

(c) Der Kettenbruch von ϕ^n ist $\begin{cases} [L_n; \overline{L_n}] & \text{für } n \text{ ungerade} \\ [L_n - 1; \overline{1, L_n - 2}] & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

(d) Bestimmen Sie den n-ten Näherungsbruch für ϕ^a, für alle a, n.