

Aufgaben zu Kapitel 1

(1) Beweis oder Gegenbeispiel:

(a) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. $a|b$, aber $a \nmid c \Rightarrow a|c$

(b) Sei $d := \text{ggT}(a, b)$. Dann ist $\text{ggT}(a/d, b) = 1$

(c) Die Gleichung $262x + 302y = 15$ besitzt ganzzahlige Lösungen.

(d) Die Gleichung $262x + 302y = 10$ besitzt ganzzahlige Lösungen.

(2) Bei vollständiger Induktion ist die Induktionsvoraussetzung, daß die zu beweisende Aussage A für n wahr. Dann ist zu zeigen, daß $A(n+1)$ wahr ist.

Zeigen Sie, daß vollständige Induktion äquivalent ist zur "starken" vollständigen Induktion. Bei dieser ist die Induktionsvoraussetzung, daß $A(k)$ wahr ist für alle $k \leq n$. Zu zeigen ist wieder, daß dann auch $A(n+1)$ wahr ist.

(3) Lesen Sie den Wikipedia-Artikel zu "Primfaktorzerlegung" und vergleichen Sie den dort gegebenen Beweis der Fundamentalsatzes der Arithmetik mit den beiden in der Vorlesung gegebenen Beweisen in Kapitel 1.

(4) Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß n und $n+1$ einen gemeinsamen Primteiler haben?

(5) Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots \text{ mit } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 2.$$

Bestimmen Sie $\text{ggT}(F_n, F_{n+1})$ für alle n .

(6) Bestimmen Sie die Menge aller ganzen Zahlen der Form
 $85m + 48n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$)

(7) Gegeben ist ein Rechteck der Größe 85×48 , das mit quadratischen Kacheln bedeckt werden soll, wobei in jedem Schritt eine möglichst große Kachel verwendet werden soll. Im ersten Schritt also eine 48×48 -Kachel, dann eine 37×37 -Kachel usw. Man darf mehrere Kacheln gleicher Größe verwenden.

(a) Erklären Sie das Vorgehen in diesem Beispiel und allgemein für ein $a \times b$ -Rechteck (mit $a, b \in \mathbb{N}$).

(b) Beweisen Sie die folgende Formel für Fibonacci-Zahlen:

$$F_{n+1} \cdot F_n = F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_{n-1}^2 + F_n^2$$

(8) Kann man aus einem See 1 Liter Wasser in eine Badewanne füllen, wenn man eine 25 Liter-Kanne und eine 17 Liter-Kanne zur Verfügung hat?

Gibt das auch so, daß man erst nur eine Kanne verwendet und danach nur die andere? Kann man wählen, mit welcher Kanne man anfängt?