§9. Charaktere und Gruppenstruktur

Die Charaktertafel bestimmt die Gruppe nicht. Z.B haben die Quaternionengruppe und die Diedergruppe mit 8 Elementen dieselbe Charaktertafel, sind aber nicht isomorph.
Die komplexe Gruppenalgebra ist dagegen schon durch die Dimensionen der einfachen Moduln und ihre Anzahl bis auf Isomorphie bestimmt, d.h. durch die erste Spalte der Charaktertafel.
Die Charaktertafel kennt also die Gruppe nicht, ist aber auch leichter zu verstehen. Also sollten wir fragen: Welche Eigenschaften einer Gruppe kann man an der Charaktertafel ablesen?
Eine einfache Antwort kennen wir schon: G ist abelsch $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}G$ ist kommutativ $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}G$ ist eine Summe von 1×1-Matrizen $\Leftrightarrow$ alle einfachen Moduln sind eindimensional $\Leftrightarrow$ alle Einträge in der ersten Spalte der Charaktertafel sind 1
In diesem Kapitel wollen wir sehen, was die Charaktertafel über schwierige Eigenschaften der Gruppe weiß, insbesondere über die in der Galoistheorie wichtige Auflösbarkeit.

Wir fangen mit Normalteilern an. Eine Darstellung der Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\rho: G \to GL_n(\mathbb{C})$ für irgendein n. Der Kern eines Gruppenhomomorphismus ist ein Normalteiler. Der Charakter von ρ kennt den Kern:

<u>9.1 Lemma:</u> Sei ρ eine Darstellung von G über $\mathbb{C}$, mit Charakter $\chi = \chi_\rho$. Dann liegt $g \in G$ im Kern von ρ $\Leftrightarrow$ $\chi(g) = \chi(1)$.

Beweis: Sei $g \in G$ und $g \in \mathrm{Kern}(\rho)$. Also ist $\rho(g)$ die Einheitsmatrix I. Aber 1_G liegt auch im Kern von ρ $\Rightarrow$ $\rho(g) = \rho(1_G)$ $\Rightarrow$ $\chi(g) = \chi(1_G)$.
Für die Gegenrichtung verwenden wir Lemma 8.4:

$\chi(g)$ ist eine Summe von Einheitswurzeln, etwa $\chi(g)=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_f$ mit $f=\chi(1)$ (= Größe der Matrix $\rho(g)$). $\chi(1)=f$ (dieselbe Größe der Matrix), nach Voraussetzung also $f=\chi(g)=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_f$. Alle $|\varepsilon_i|=1 \Rightarrow f=\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_f$ geht nur, wenn alle $\varepsilon_i=1$ sind, d.h. $\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_f)$ ist die Einheitsmatrix. $\rho(g)$ ist ähnlich zu $\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_f) \Rightarrow \rho(g)=I$. □

Deshalb ist es sinnvoll, den Kern eines Charakters zu definieren:

9.2 Definition: Sei χ ein Charakter von G. Dann ist der Kern von χ definiert als $\mathrm{Kern}(\chi):=\{g\in G : \chi(g)=\chi(1)\}$.

Der Kern von χ ist gleich dem Kern der Darstellung und damit ein Normalteiler.
Wie passt das dazu, daß Charaktere Klassenfunktionen sind?

Jeder ~~Kern~~ Charakter ist eine ganzzahlige Linearkombination von irreduziblen Charaktern. Deshalb sollten wir die Kerne vergleichen.

9.3 Lemma: Sei χ ein Charakter von G und $\chi=\sum n_i\chi_i$ mit $\chi_i\in \mathrm{Irr}(G)$. Dann ist $\mathrm{Kern}(\chi)=\bigcap_{n_i>0}\mathrm{Kern}(\chi_i)$. Außerdem ist $\bigcap_{\chi_i\in\mathrm{Irr}(G)}\mathrm{Kern}(\chi_i)=1$.

Beweis: Wegen 8.4 ist $|\chi_i(g)|\le\chi_i(1)$ immer wahr und $\chi(g)=\chi(1)$ geht nur, wenn $\chi_i(g)=\chi_i(1)$ $\forall i$ mit $n_i\neq 0$. Die Umkehrung ist klar. Daraus folgt die erste Behauptung.
Die zweite Behauptung folgt aus 8.1(a). □

Aus der Charaktertafel von G kann man leicht Normalteiler ablesen, als Kerne von irreduziblen Charakteren. Der Durchschnitt der so gefundenen Normalteiler ist laut 9.3. wieder Kern eines Charakters (nicht mehr irreduzibel), und damit wieder ein Normalteiler.
Frage: Findet man auf diese Weise alle echten Normalteiler von G?

Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Dann ist $\hat{G} = G/N$ eine Gruppe und hat eine reguläre Darstellung, $\hat{\rho}: \hat{G} \longrightarrow GL(\mathbb{C}\hat{G})$. Da $\hat{G}$ ein Quotient von G ist

$G \underset{g \mapsto gN}{\longrightarrow} \hat{G} \underset{\hat{\rho}}{\longrightarrow} GL(\mathbb{C}\hat{G})$ auch eine Darstellung von G, und diese Darstellung hat genau den Kern N. warum?

Die Antwort auf die Frage ist also: Ja, jeder Normalteiler ist Kern eines Charakters.

Konkret muß man hier alle $N_i = \text{Kern}(\chi_i)$ schneiden mit χ_i irreduzibel und ρ_i kommt in $G \to GL(\mathbb{C}\hat{G})$ vor.

Wenn man die Konjugations klassen kennt, sieht man welche Elemente im Kern eines Charakters liegen.

Die Elementezahl der Konjugationsklasse sehen wir direkt an der Charaktertafel (Theorem 8.7 und Beweis: $C_G(g)$ ist bestimmt, und $|Cl_G(g)| = {|G|}/{|C_G(g)|}$).

Der triviale Charakter hat G selbst als Kern, jeder andere irreduzible Charakter hat andere Werte, also einen anderen Kern und damit einen echten Kern. Folglich gilt:

9.4 Korollar: Eine Gruppe G ist einfach $\Leftrightarrow$ $\text{Kern}(\chi) = 1$ $\forall \chi \in \text{Irr}(G)$ außer dem Charakter der trivialen ~~Charakter~~. Darstellung.

Wenn man weniger Kerne schneidet, erhält man einen größeren Normalteiler, und die Charaktertafel weiß auch, welche Konjugations klassen in einem Charakter enthalten sind.

Deshalb kann man mit Hilfe der Charaktertafel Ketten von Normalteilern finden. Was bedeutet das für die Frage der Auflösbarkeit? Nach 6.1 sind endliche abelsche Gruppen Summen von p-Gruppen. In §3 (Seite 3.7) haben wir gesehen, daß alle p-Gruppen auflösbar sind.

$\Rightarrow$ G ist auflösbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Kette von Normalteilern $M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n = G$, so daß

jeder Index $[M_{i+1} : M_i]$ eine Primzahlpotenz ist.
Das ist an der Charaktertafel ablesbar.
Zur Auflösbarkeit kommen wir nachher zurück, um eine konkrete Anwendung zu sehen.

Wenn $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler ist, können wir die Charaktertafeln von N und von G gut vergleichen: Details der Beweise?

- Wenn χ ein Charakter von G ist und $N \subseteq \mathrm{Kern}(\chi)$, dann ist χ konstant auf den Nebenklassen von N in G. $\Rightarrow \hat{\chi}(Ng) := \chi(g)$ ist wohldefiniert und tatsächlich ein Charakter von G/N.
- Umgekehrt sei $\hat{\chi}$ ein Charakter von G/N. Dann ist $\chi(g) := \hat{\chi}(Ng)$ ein Charakter von G mit $N \subseteq \mathrm{Kern}(\chi)$.

In diesen Situationen gilt: $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \Leftrightarrow \hat{\chi} \in \mathrm{Irr}(G/N)$.

Man kann daher weitere Information über die Charaktertafel von G gewinnen, indem man Normalteiler findet und deren Charaktere bestimmt und in die Charaktertafel von G einträgt.

Die Nichtauflösbarkeit der symmetrischen Gruppe Σ_n für $n \geq 5$ haben wir in §3 so gezeigt, daß wir für eine Gruppe G die abgeleitete Gruppe $D(G)$ definiert haben, also die Kommutatoruntergruppe. Das Kriterium 3.6 sagt: G auflösbar $\Leftrightarrow \exists n: D^n(G) = 1$. Und 3.7 zeigt die Nichtauflösbarkeit durch: $D(\Sigma_n) = D(A_n) = A_n$.

Auch zu $D(G)$ hat die Charaktertafel etwas zu sagen. Das ist nicht überraschend, denn man sieht ja auch an der Charaktertafel, ob eine Gruppe abelsch ist.

9.5 Korollar: Sei G eine Gruppe und $D(G)$ die Kommutatoruntergruppe.

(a) $D(G) = \bigcap_{\substack{\lambda \in \mathrm{Irr}(G), \\ \lambda(1)=1}} \mathrm{Kern}(\lambda)$ (diese λ sind die linearen Charaktere)

(b) $[G:D(G)]$ = Anzahl der linearen Charaktere von G.

($G = D(G)$ bedeutet daher, daß G nur einen linearen Charakter hat. Da Σ_n für $n \geq 2$ zumindest den trivialen und den Vorzeichen charakter hat, ist $\Sigma_n \neq D(\Sigma_n)$. A_n hat dagegen für $n \geq 5$ nur einen linearen Charakter – den trivialen, den es bei jeder Gruppe gibt.)

Beweis: Sei λ ein linearer Charakter, d.h. der Charakter einer Darstellung $\rho: G \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} - \{0\}$. ρ muß Kommutatoren auf Kommutatoren abbilden, folglich auf 1. $\Rightarrow D(G) \subseteq \mathrm{Kern}(\lambda)$.
Andererseits ist $G/D(G)$ abelsch, alle Charaktere von $G/D(G)$ sind also linear. Der Vergleich von χ mit $\hat{\chi}$ auf der vorigen Seite zeigt, daß die linearen Charaktere von G genau den Charakteren von $G/D(G)$ entsprechen.
Aus 9.3 folgt (a).
Die Ordnung von $G/D(G)$ (abelsch) ist gleich $|\mathrm{Irr}(G/D(G))| \Rightarrow$ (b) $\square$

Die Charaktertafeln von G und G/N sind eng miteinander verbunden, die von N und G dagegen nicht. Um Charaktere von Untergruppen $H \subset G$ mit denen von G zu vergleichen, braucht man weitere Theorie, die wir nicht behandeln werden.
Unser Ziel ist stattdessen, als Anwendung der Charaktertheorie die Auflösbarkeit einer Klasse von Gruppen nachzuweisen:

9.6 Theorem (Burnside 1904): Sei $|G| = p^a q^b$, p und q Primzahlen. Dann ist G auflösbar.

Das verallgemeinert die Aussage, daß p-Gruppen auflösbar sind, ganz wesentlich. Und es deckt viele Beispiele ab, z.B. Σ_n für $n \leq 4$. Es zeigt, daß es nicht auflösbare Gruppen gibt, deren Ordnung 3 Primteiler hat.
(Ein berühmter Satz von Feit und Thompson sagt aber, daß Gruppen ungerader Ordnung immer auflösbar sind.)
Burnsides Theorem ist eine Anwendung der Darstellungstheorie.
Kompliziertere Beweise ohne Darstellungstheorie wurden erst in den 1970er Jahren gefunden.

Der Beweis von 9.6 kommt am Ende des Kapitels, nach einigen Vorarbeiten.
Laut 8.4 sind Charakterwerte Summen von Einheitswurzeln. Solche Zahlen betrachten wir jetzt genauer.
Einheitswurzeln liegen in endlichen Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$, die Werte von Charakteren also auch in Erweiterungen, die man erhält, wenn man alle benötigten Einheitswurzeln zu $\mathbb{Q}$ adjungiert. Elemente von endlichen Körpererweiterungen sind Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{Q}[x]$, also algebraische Zahlen.
Einheitswurzeln sind sogar Nullstellen von Polynomen in $\mathbb{Z}[x]$.

<u>9.7 Definition:</u> Eine komplexe Zahl, die eine Nullstelle eines normierten Polynoms $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ in $\mathbb{Z}[x]$ ist, heißt <u>ganze algebraische Zahl</u> (oder: ganzalgebraisch).

Beispiel: Einheitswurzeln, $\sqrt{2}$, ...

Die Bezeichnung ist sinnvoll wegen:

<u>9.8 Lemma:</u> Die ganzalgebraischen Zahlen in $\mathbb{Q}$ sind genau die ganzen Zahlen, also $\mathbb{Z}$.

Beweis: $n \in \mathbb{Z}$ ist Nullstelle von $x - n \in \mathbb{Z}[x] \Rightarrow n$ ist ganzalgebraisch.

Gegenrichtung: Sei $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ ganzalgebraisch, Nullstelle des Polynoms $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Nach Kürzen ist $ggT(r,s)=1$. Einsetzen: $\frac{r^n}{s^n} + a_{n-1}\frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0$

$\Rightarrow r^n = -a_{n-1}r^{n-1}s - a_{n-2}r^{n-2}s^2 - \ldots - a_1 r s^{n-1} - a_0 s^n$

$\Rightarrow s \mid r \Rightarrow s = \pm 1, \frac{r}{s} \in \mathbb{Z}$ □

Summen und Produkte algebraischer Zahlen sind wieder algebraische Zahlen. Dasselbe gilt für ganzalgebraische Zahlen - was nach der Definition nicht offensichtlich ist. Daraus lernen wir, daß Charakterwerte immer ganzalgebraisch sind. Bei algebraischen Zahlen ist das Argument, daß alle Elemente endlicher Erweiterungen algebraisch sein müssen. Das übertragen wir jetzt schrittweise auf ganzalgebraische Zahlen (die in der algebraischen Zahlentheorie genauer untersucht werden).

Erst das Analogon zu Körpererweiterungen:

9.9 Lemma: Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ endlich viele ganze algebraische Zahlen. Dann gibt es einen Ring S sodaß:

(a) $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$ (Inklusionen von Ringen),

(b) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in S$,

(c) S ist endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Modul.

Beweis: Die α_i erfüllen Gleichungen der Form

$$(*) \quad \alpha_i^{k_i} = f_i(\alpha_i), \; f_i \in \mathbb{Z}[x] \text{ vom Grad höchstens } k_i - 1$$

Sei S die Menge aller $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Elementen der Form

$$\alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\cdots\alpha_n^{r_n} \quad \text{mit } 0 \le r_i \le k_i - 1$$

Wegen (*) ist jede Potenz von α_i eine Linearkombination von $1, \alpha_i, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^{k_i-1}$. $\Rightarrow$ S ist ein Ring und erfüllt alle Bedingungen. □

(S ist unser Ersatz für den Erweiterungskörper bei algebraischen Zahlen. Die endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduln kennen wir. In $\mathbb{C}$ gibt es keine Torsionselemente $\Rightarrow$ S ist als abelsche Gruppe frei von endlichem Rang.)

9.10 Theorem: Sei S ein Ring mit $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$ und endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$-Modul. Dann sind alle Elemente von S ganze algebraische Zahlen.
(9.9 und 9.10 zusammen sagen also, daß die ganzen algebraischen Zahlen genau die Elemente solcher Ringe S sind.)

Beweis: Sei $s \in S$, z.z. s ist ganzalgebraisch.
Sei $y_1, \dots, y_n$ ein Erzeugendensystem von S als $\mathbb{Z}$-Modul.
$s y_i \in S \Rightarrow s y_i = \sum_j a_{ij} y_j$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, für jedes i. Sei $A = (a_{ij})_{i,j}$

$$\Rightarrow A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \left(s \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} - A\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ s ist eine Nullstelle des Polynoms $f(x) = \det\left(x \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} - A\right)$, und $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ und normiert. $\square$

Summen und Produkte von ganzalgebraischen Zahlen sind daher wieder ganzalgebraisch $\Rightarrow$ Werte von Charakteren sind ganzalgebraisch.
Division ganzalgebraischer Zahlen muß kein ganzalgebraisches Ergebnis haben, z.B. ist $\chi(g)/\chi(1)$ nicht immer ganz algebraisch. Gewisse Vielfache solcher Zahlen sind aber ganzalgebraisch, wie wir jetzt zeigen werden.
Sei $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ und ρ eine zugehörige Darstellung. Sei $z \in Z(\mathbb{C}G)$.
z kommutiert mit ganz $\underset{(bzw.\ \rho(z))}{\mathbb{C}G}$ $\Rightarrow \rho(z)$ kommutiert mit allen $\rho(g)$, $g \in G$, d.h. $\rho(g) z = z \rho(g)$. $\Rightarrow$ z ist ein $\mathbb{C}G$-Endomorphismus des zu ρ gehörenden einfachen Moduls. 7.5 (Schurs Lemma) $\Rightarrow$ $\rho(z)$ ist ein skalares Vielfaches der Identität des einfachen Moduls, bzw. der Einheitsmatrix, $\rho(z) = \varepsilon \underset{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}{I}$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{C}$.
Diesen Skalar ε nennen wir $\omega_\chi(z)$. Er hängt nicht von der Wahl des einfachen Moduls ab (der nur bis auf Isomorphie bestimmt ist), weil εI nur zu sich selbst konjugiert ist.
Das definiert eine von χ abhängige Funktion

$$\omega = \omega_\chi : Z(\mathbb{C}G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Nach 7.17 hat $Z(\mathbb{C}G)$ eine $\mathbb{C}$-Basis bestehend aus den Klassensummen $S(K_1)$, $S(K_2)$ usw, d.h. den Summen der Elemente in den Konjugationsklassen. Sei K so eine Klassensumme und $|K|$ die Anzahl der Summanden, d.h. die Anzahl der Elemente in der zugehörigen Konjugationsklasse. Sei g ein Repräsentant der Konjugationsklasse.

Behauptung: $\omega_\chi(K) = \dfrac{\chi(g)\cdot|K|}{\chi(1)}$ (also ist $\omega_\chi(K)$ durch die Charaktertafel bestimmt)

Beweis der Behauptung:

Zueinander konjugierte Elemente haben denselben Charakterwert

$\Rightarrow \chi(K) = \chi(g)\cdot|K|$ (1)

Nach Definition von ω_χ ist $\rho(K) = \omega_\chi(K)\cdot I$. Nimmt man auf beiden Seiten die Spuren, ergibt sich: $\chi(K) = \chi(1)\cdot\omega_\chi(K)$, da I eine $\chi(1)\times\chi(1)$-Matrix ist. $\Rightarrow$ Behauptung

Aus der Behauptung folgt nicht, daß $\omega_\chi(K)$ ganz algebraisch ist. Aber:

9.11 Lemma: $\omega_\chi(K)$ ist eine ganze algebraische Zahl.

Beweis: Seien $S(K_1), \dots, S(K_m)$ die Klassensummen. K ist eine davon.

Laut 7.17 ist ein Produkt von Klassensummen eine ganzzahlige Linearkombination von Klassensummen.

Die Darstellung ρ zu χ ist ein Homomorphismus, $Z(\mathbb{C}G)$ kommutativ $\Rightarrow$ und $\rho(z) = \varepsilon I$

ω_χ ist ein Homomorphismus von Algebren,

$\omega_\chi : Z(\mathbb{C}G) \to \mathbb{C}$ und $\omega_\chi(1) = 1$ warum?

Sei S der $\mathbb{Z}$-Modul, der von $\omega_\chi(S(K_1)), \dots, \omega_\chi(S(K_m))$ erzeugt wird.

Wegen 7.17 ist S ein Ring und $\mathbb{Z} \subseteq S \subseteq \mathbb{C}$. 9.10 $\Rightarrow$ alle Elemente, unter anderem $\omega_\chi(K)$, sind ganz algebraische Zahlen $\square$

In 9.2 haben wir Kerne von Charakteren definiert und damit Normalteiler gefunden: $\mathrm{Kern}(\chi) = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$. Die nächste Definition sieht ganz ähnlich aus und enthält auch Information über G.

9.12 Definition: Das Zentrum eines Charakters χ ist
$Z(\chi) := \{g \in G : |\chi(g)| = \chi(1)\}$ also: $\mathrm{Kern}(\chi) \subseteq Z(\chi)$

9.13 Lemma: Sei P eine Darstellung von G mit Charakter χ. Dann:
(a) $Z(\chi) = \{g \in G : P(g) = \varepsilon I$ für ein $\varepsilon \in \mathbb{C}\}$ ($I = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, wie immer)
(b) $Z(\chi)$ ist eine Untergruppe von G
(c) Die Einschränkung $\chi_{Z(\chi)}$ des Charakters χ auf die Untergruppe $Z(\chi)$ ist von der Form $\chi_{Z(\chi)} = \chi(1) \cdot \lambda$ für einen linearen Charakter λ von $Z(\chi)$
(d) $Z(\chi) / \mathrm{Kern}(\chi)$ ist zyklisch
(e) $Z(\chi)/\mathrm{Kern}(\chi)$ ist enthalten im Zentrum der Quotientengruppe $G/\mathrm{Kern}(\chi)$
(f) Wenn χ irreduzibel ist, gilt Gleichheit.

Beweis: $P(g)$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix, deren Einträge Einheitswurzeln sind. $\Rightarrow$ $|\chi(g)| = \chi(1)$ geht genau dann, wenn alle Einträge gleich sind $\Rightarrow$ (a). Sei $\lambda(g)$ dieser ε. P multiplikativ $\Rightarrow$ λ multiplikativ $\Rightarrow$ (b) und λ ist ein Homomorphismus, d.h. ein linearer Charakter von $Z(\chi)$. In $\chi_{Z(\chi)}$ steht $\chi(1)$ mal λ in der Diagonale $\Rightarrow$ (c).
Nach Definition von λ ist $\underset{\text{in } Z(\chi)}{\mathrm{Kern}(\chi)} = \mathrm{Kern}(\lambda) \Rightarrow Z(\chi)/_{\mathrm{Kern}(\chi)} \simeq \mathrm{Im}(\lambda)$
$\mathrm{Im}(\lambda)$ ist eine endliche multiplikative Untergruppe von $\mathbb{C}$. $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(\lambda)$ ist zyklisch (Algebra, Lemma 6.14) $\Rightarrow$ (d).
(e) folgt dann aus $\mathrm{Kern}(\chi) = \mathrm{Kern}(P)$ und $P(Z(\chi)) \subseteq \underset{\text{Zentrum}}{Z}(P(G))$.
Wenn $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, können wir wieder verwenden, daß die Endomorphismen des zugehörigen Moduls skalare Vielfache von I sind und das Zentrum von $P(G)$ darin enthalten sein muss, weil Multiplikation mit einem zentralen Element ein Endomorphismus ist. $\square$

Das sieht technisch aus, zeigt aber, daß auch das Zentrum der Gruppe G durch die Charaktertafel bestimmt ist:

9.14 Korollar: Das Zentrum der Gruppe G erfüllt
$$Z(G) = \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} Z(\chi)$$

Beweis: $Z(G)$ ist ein Normalteiler, $\mathrm{Kern}(\chi)$ auch $\Rightarrow Z(G)\cdot\mathrm{Kern}(\chi)$ ist eine Untergruppe und $(Z(G)\cdot\mathrm{Kern}(\chi))/\mathrm{Kern}(\chi) \subseteq \underbrace{Z(G/\mathrm{Kern}(\chi))}_{\overset{9.13(f)}{=} Z(\chi)/\mathrm{Kern}(\chi)}$

$\Rightarrow Z(G) \subseteq Z(\chi)$

Umgekehrt sei $g \in Z(\chi)$ für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$.

$\Rightarrow$ Die Nebenklasse $g\cdot\mathrm{Kern}(\chi)$ liegt in $Z(G/\mathrm{Kern}(\chi)) = Z(\chi)/\mathrm{Kern}(\chi)$

$\Rightarrow \forall x \in G: [g,x] = g^{-1}x^{-1}gx \in \mathrm{Kern}(\chi)\ \forall \chi$

$\Rightarrow [g,x] \in \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{Kern}(\chi) \underset{9.3}{=} 1 \Rightarrow g \in Z(G).$ $\square$

Jetzt nähern wir uns dem Beweis von Burnsides Theorem, 9.6. Das folgende Ergebnis ist der wichtigste Schritt im Beweis:

9.15 Theorem (Burnside): Sei $g \in G$, $\mathcal{C}\ell(g)$ seine Konjugationsklasse und $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Sei $\mathrm{ggT}(\chi(1), |\mathcal{C}\ell(g)|) = 1$. Dann ist $g \in Z(\chi)$ oder $\chi(g) = 0$.

Beweis: $\dfrac{\chi(g)\cdot|\mathcal{C}\ell(g)|}{\chi(1)}$ ist ganz algebraisch (9.11). Nach Voraussetzung existieren $u,v \in \mathbb{Z}$ mit $u\cdot\chi(1) + v\cdot|\mathcal{C}\ell(g)| = 1$.

$\Rightarrow \dfrac{\chi(g)\cdot(1-u\chi(1))}{\chi(1)} = v\,\dfrac{\chi(g)\,|\mathcal{C}\ell(g)|}{\chi(1)}$ ist auch ganz algebraisch

Wir nehmen an, daß $g \notin Z(\chi)$ und müssen zeigen, daß $\chi(g) = 0$.

$g \notin Z(\chi) \Rightarrow |\chi(g)| < \chi(1)$ und $\left|\dfrac{\chi(g)}{\chi(1)}\right| < 1$.

$u\,\chi(g)$ ist ganz algebraisch $\Rightarrow \alpha := \chi(g)/\chi(1)$ ist ebenfalls ganz algebraisch

Sei n die Ordnung von g und L der Zerfällungskörper von $x^n - 1$ über $\mathbb{Q}$, als Teilmenge von $\mathbb{C}$ gewählt. $L/\mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung. Jedes $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ bildet Einheitswurzeln in Einheitswurzeln ab. Daher ist mit $\chi(g)$ auch $\underbrace{\chi(g)^\sigma}_{\text{das ist } \sigma(\chi(g)) \in L}$ eine Summe von Einheitswurzeln und $|\chi(g)^\sigma| \leq \chi(1)$

und $|\alpha^\sigma| \leq 1\ \forall \sigma \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

Nach Voraussetzung ist $|\alpha| < 1 \Rightarrow |\prod_{\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})} \alpha^\sigma| < 1$, da α vorkommt.
α^σ erfüllt dieselben Gleichungen wie α (ganz algebraisch, da $\mathbb{Z}[x]$ fest bleibt) $\Rightarrow$ alle α^σ sind ebenfalls ganz algebraisch $\Rightarrow \beta := \prod_{\sigma \in Gal(L/\mathbb{Q})} \alpha^\sigma$ ist auch ganz algebraisch.

Andererseits ist $\beta^\sigma = \beta$ $\forall \sigma$, d.h. β liegt im Fixkörper von $Gal(L/\mathbb{Q})$.
Nach 1.3 ist das $\mathbb{Q}$. $\Rightarrow$ β liegt in $\mathbb{Q}$ und ist ganz algebraisch
$\overset{9.8}{\Rightarrow} \beta \in \mathbb{Z}$. Aber $|\beta| < 1 \Rightarrow \beta = 0$. $\Rightarrow \exists$ ein Faktor $\alpha^\sigma = 0 \Rightarrow \alpha = \sigma^{-1}(\sigma(\alpha)) = 0$
$\alpha = \chi(g)/\chi(1)$, $\alpha = 0$ bedeutet $\chi(g) = 0$. □

(Wenn $g \in Z(\chi)$ ist, dann ist nach Definition von $Z(\chi)$: $|\chi(g)| = \chi(1) \neq 0$.
In 9.15 können wir also auch sagen: „entweder $g \in Z(\chi)$ oder $\chi(g) = 0$".)

Eine endliche nichtabelsche einfache Gruppe hat nach Definition keine nichttrivialen Normalteiler, also auch kein nichttriviales Zentrum. Nur das Einselement hat eine einelementige Konjugationsklasse. Jetzt können wir auch etwas über die anderen Konjugationsklassen sagen:

9.16 Korollar: Sei G eine nichtabelsche einfache Gruppe, $g \in G$, $g \neq 1$. Dann ist die Elementezahl der Konjugationsklasse von g keine Primzahlpotenz.

Beweis: Angenommen $|\mathcal{C}\ell(g)| = p^a$ für eine Primzahl p, $a \in \mathbb{N}$.
Sei $\chi \in Irr(G)$, nicht der triviale Charakter. G einfach $\Rightarrow$ Kern $(\chi) = 1$.
G nicht abelsch, einfach $\Rightarrow Z(\chi) = Z(G) = 1$, siehe 9.13 (e).
Sei ρ der reguläre Charakter, nach 8.1 ist $\rho(g) = 0$, da $g \neq 1$. Und, nochmal 8.1,
$\underset{0}{\overset{\text{"}}{\rho(g)}} = \sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)\chi(g)$ Wenn $p \nmid \chi(1)$, dann ist $\chi(g) = 0$ nach 9.15 und weil $Z(\chi) = 1$.
Also können wir die Summanden mit $p \nmid \chi(1)$ weglassen, bis auf den trivialen Charakter.

$\Rightarrow 0 = \rho(g) = 1 + \sum_{\substack{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \\ p \mid \chi(1)}} \chi(1)\chi(g) = 1 + p\Big(\sum_{p \mid \chi(1)} \underbrace{\frac{\chi(1)}{p}}_{\in \mathbb{N}} \chi(g)\Big)$

$\Rightarrow \sum_{p \mid \chi(1)} \frac{\chi(1)}{p}\chi(g) = -\frac{1}{p}$. Aber $\frac{\chi(1)}{p}\chi(g)$ und die Summe sind ganzalgebraisch
Das ist ein Widerspruch zu 9.8 $\square$

Jetzt kommt der Beweis von Burnsides Theorem 9.6:

Induktion nach $|G|$, nichts zu zeigen für $|G|=1$.
Falls G nicht einfach ist: $\exists N \trianglelefteq G$, $N \neq 1$, echte normale Untergruppe.
$\mathrm{ord}(N) \mid \mathrm{ord}(G) \overset{\text{Ind}}{\Rightarrow} N$ und G/N sind beide auflösbar $\Rightarrow G$ ist auflösbar
Falls G einfach ist: $|G| = p^a q^b$ mit $a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists$ Sylowuntergruppen zu p und q, z.B. $P \neq 1$ p-Sylowuntergruppe.
$|P| = p^a$, p-Gruppen haben ein nichttriviales Zentrum (Algebra 3.8)
$\Rightarrow \exists g \in Z(P)$, $g \neq 1$.
$g \in Z(P) \Rightarrow P \leq C_G(g)$ (Zentralisator von g) $\Rightarrow \underbrace{[G : C(g)]}_{= |\mathcal{C}\ell(g)| \neq 1, \text{ da } G \text{ einfach}} \mid [G:P] = q^b$
$\Rightarrow |\mathcal{C}\ell(g)|$ ist eine Primzahlpotenz
$\overset{9.16}{\Rightarrow}$ G ist abelsch $\Rightarrow$ G ist auflösbar $\square$