§8. Charaktertafeln

Die Theorie in §7 legt nahe, daß Charaktere sehr nützlich sein könnten. Aber wir müssen noch lernen, Charaktere zu berechnen. Wir kennen schon die Gleichung $|G| = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2$ und suchen nach weiteren Gleichungen und nach Relationen zwischen verschiedenen Charakteren.

Idee: Wir betrachten den $\mathbb{C}G$-Modul $\mathbb{C}G$, d.h. die Darstellung von G auf $\mathbb{C}G$, und den zugehörigen Charakter ρ. $\mathbb{C}G$ ist der reguläre Modul, ρ heißt <u>regulärer Charakter</u>. Die reguläre Darstellung schickt $g \in G$ auf die Linksmultiplikation mit g, $\underset{\substack{\uparrow \\ G}}{h} \mapsto gh$. Wenn man $\{h \in G\}$ als Basis nimmt, ist die Matrix zu $\rho(g)$ also gegeben durch Spalten zu h mit Eintrag 1 in Zeile gh, 0 sonst.

Beispiel: $G = C_3 = \{e, g, g^2\}$

$$\text{Darstellung} \quad e \mapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e & g & g^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad g \mapsto \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e & g & g^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad g^2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Charakter: $\quad 3 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$

<u>8.1 Lemma:</u> Sei ρ der Charakter der regulären Darstellung.

(a) Für $g \in G$ ist $\rho(g) = \begin{cases} |G| & \text{für } g = e \\ 0 & \text{für } g \neq e \end{cases}$

(b) $\rho = \sum_{j=1}^{\ell} \chi_j(1)\, \chi_j$

Beweis: (a) Wie im Beispiel wählen wir G selbst als Basis. Zu e gehört die Einheitsmatrix, also Spur $|G|$. Zu $g \neq e$ erhalten wir in der darstellenden Matrix 0 als Diagonaleintrag, es sei denn $gh = h$, was nie passieren kann.
(b) folgt aus §7: $\chi_j(1) = \dim S_j$ = Multiplizität von S_j in $\mathbb{C}G$. □

Die Algebrazerlegung von $\mathbb{C}G$ in §7 war gegeben durch die Zerlegung $1_G = e_1 + \dots + e_\ell$: $\mathbb{C}G = \mathbb{C}Ge_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}Ge_\ell$, $\mathbb{C}Ge_i = \mathrm{Mat}(n_i \times n_i, \mathbb{C})$ mit $n_i = \chi_i(1) = \dim S_i$.
Für die Elemente e_i können wir nun eine Formel angeben:

8.2 Proposition: Für $i = 1, \dots, \ell$ ist $e_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(1)\, \chi_i(g^{-1})\, g$

Beweis: Sei $e_i = \sum a_h h$ und $g \in G$. Dann ist $\rho(e_i g^{-1}) = \rho\left(\left(\sum_{h \in G} a_h h\right) g^{-1}\right) =$
$= \sum_{h \in G} a_h\, \rho(h g^{-1}) \underset{8.1(a)}{=} a_g |G|$

$$\overset{8.1(b)}{\Rightarrow} \quad a_g |G| = \sum_{j=1}^{\ell} \chi_j(1)\, \chi_j(e_i g^{-1})$$

χ_j gehört zur Darstellung S_j: $x \in S_j$ wird mit $e_i g^{-1}$ multipliziert. Aber $g^{-1} S_j \subseteq S_j$, weil S_j ein Modul ist und $\underset{S_j}{\underset{\cap}{e_i y}} = \begin{cases} y & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (e_i ist das Einselement auf der i-ten Komponente, 0 sonst)

$\Rightarrow \chi_j(e_i g^{-1}) = \delta_{ij} \chi_j(g^{-1})$, wobei $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ (Kronecker-δ)

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\ell} \chi_j(1)\, \chi_j(e_i g^{-1}) = \chi_i(1)\, \chi_i(g^{-1}) \Rightarrow a_g = \frac{1}{|G|} \chi_i(1)\, \chi_i(g^{-1})$ $\square$

Die e_i erfüllen interessante Gleichungen: $e_i^2 = e_i$, $e_i e_j = 0$ für $i \neq j$, $1 = \sum e_i$.
Damit können wir aus 8.2 noch mehr machen.

8.3 Theorem: (a) (Verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation) Für $h \in G$ ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(gh)\, \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij} \frac{\chi_i(h)}{\chi_i(1)} \quad \forall i, j$$

(b) (Erste Orthogonalitätsrelation) $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_i(g)\, \chi_j(g^{-1}) = \delta_{ij}$

(Hier scheint ein Skalarprodukt im Spiel zu sein. Das werden wir noch genauer anschauen.)

Beweis: (a) In $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ setzen wir die Formel in 8.2 ein:

rechte Seite: $\frac{\delta_{ij}}{|G|} \sum_{g\in G} \chi_i(1)\chi_i(g^{-1})g$, für $g=h^{-1}$ ist der Koeffizient $\frac{\delta_{ij}}{|G|}\chi_i(1)\chi_i(h)$

linke Seite: $\left(\frac{1}{|G|}\sum_{(gh)^{-1}\in G} \chi_i(1)\chi_i(gh)\underbrace{(gh)^{-1}}_{h^{-1}g^{-1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_j(1)\chi_j(g^{-1})g\right)$

hat nach Ausmultiplizieren als Koeffizienten desselben Basiselements h^{-1}: $\frac{\chi_i(1)\chi_j(1)}{|G|^2}\sum_{g\in G}\chi_i(gh)\chi_j(g^{-1})$

$\Rightarrow \delta_{ij}\chi_i(h) = \frac{\chi_j(1)}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(gh)\chi_j(g^{-1})$

Für $i\neq j$ sind beide Seiten also 0, deshalb kann man rechts $\chi_j(1)$ durch $\chi_i(1)$ ersetzen. Für $i=j$: $\chi_i(1)=\chi_j(1)$. $\Rightarrow$ (a)

(b) ist der Fall $h=1$ in (a) (deshalb dort die Ersetzung von $\chi_j(1)$ durch $\chi_i(1)$) □

Nach Definition 7.13 haben wir die Darstellungen der zyklischen Gruppe C_n bestimmt: Alle einfachen Darstellungen sind eindimensional, es gibt n Isomorphieklassen. Für $\omega = e^{2\pi i/n}$ gibt es z.B. $\rho_\omega: g\mapsto(\omega)$, allgemein $\rho_{\omega^j}: g\mapsto(\omega^j)$.

Wenn G irgend eine endliche Gruppe ist und $g\in G$, dann erzeugt g eine zyklische Gruppe $\langle g\rangle \cong C_n$ für irgendein n, $n=\operatorname{ord}(g)$.

Eine Darstellung $\rho: G\to GL_p(\mathbb{C})$ können wir einschränken zu einer Darstellung $\rho: \langle g\rangle \cong C_n \longrightarrow GL_p(\mathbb{C})$, die eine Summe der bekannten Darstellungen von C_n sein muss. Analog kennen wir die Einschränkung des Charakters χ_ρ auf $\langle g\rangle$. Einschränken eines Homomorphismus ändert ja die Bildwerte nicht. Die Charakterwerte sind also keine beliebigen Zahlen.

<u>8.4 Lemma:</u> Sei ρ eine Darstellung von G mit Charakter χ, $g\in G$, $\operatorname{ord}(g)=n$. Dann:

(a) $\rho(g)$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_a)$.

(b) $\forall j$: $\varepsilon_j^n = 1$, die ε_j sind n-te Einheitswurzeln.

(c) $\chi(g) = \sum_{j=1}^{a}\varepsilon_j$ und $|\chi(g)| \le \chi(1)$.

(d) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

$\overline{z}$ komplexe Konjugation

Beweis: Wir dürfen annehmen, daß $G = C_n$ ist. Nach § 7 ist ρ halbeinfach und eine Summe der einfachen Darstellungen ρ_{ω^i} $\Rightarrow$ (a). Wir können eine Basis wählen, so daß $\rho(g) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_a \end{pmatrix}$.

$$g^n = 1_G,\ \rho(1_G) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(g)^n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varepsilon_a^n \end{pmatrix} \Rightarrow (b)$$

$\varepsilon_j^n = 1 \Rightarrow |\varepsilon_j| \leq 1$ (sogar $=$) und die Spur von $\rho(g)$ hat Betrag $\leq \sum_j |\varepsilon_j| = a = \chi(1_G)$

$\Rightarrow$ (c)

$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_a^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(g^{-1}) = \varepsilon_1^{-1} + \ldots + \varepsilon_a^{-1}$$

$$|\varepsilon_j| = 1 \Rightarrow \varepsilon_j^{-1} = \overline{\varepsilon_j} \Rightarrow (d) \quad \square$$

Jetzt kommen wir zurück zu der Frage, ob die Orthogonalität in 8.3 etwas mit einem Skalarprodukt zu tun hat. 8.3(b) können wir mit 8.4(d) auch so schreiben: $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_j(g) \overline{\chi_k(g)} = \delta_{jk} \ \forall j,k$. Das sieht noch mehr nach Skalarprodukt aus.

Die irreduziblen Charaktere von G bilden eine $\mathbb{C}$-Basis des Vektorraums der Klassenfunktionen, also definieren wir das Skalarprodukt darauf:

<u>8.5 Definition:</u> Sei G eine Gruppe, α und β Klassenfunktionen. Das "innere Produkt" von α ~~und~~ und β ist definiert als

$$[\alpha, \beta] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g) \overline{\beta(g)}$$

Das erfüllt: $[\alpha,\beta] = \overline{[\beta,\alpha]}$, $[\alpha,\alpha] > 0 \ \forall \alpha \neq 0$,

$$[z_1\alpha + z_2\beta, \mu] = z_1[\alpha,\mu] + z_2[\beta,\mu]$$

$$[\alpha, z_1\beta + z_2\mu] = \overline{z_1}[\alpha,\beta] + \overline{z_2}[\alpha,\mu]$$

$\Rightarrow$ das ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform. Wir dürfen also von einem Skalarprodukt reden.

$Irr(G)$ ist eine Orthonormalbasis.

8.6 Korollar: Seien χ und ψ Charaktere, nicht notwendig irreduzibel. Dann ist $[\chi,\psi]=[\psi,\chi]\in\mathbb{N}_0$. Und χ ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ $[\chi,\chi]=1$.

Beweis: χ und ψ sind Summen irreduzibler Charaktere, z.B. $\chi=\sum n_i\chi_i$, $\psi=\sum m_i\chi_i$. Daraus folgen die Behauptungen. $\square$

Die erste Orthogonalitätsrelation können wir noch in einer anderen Form schreiben, die oft sehr praktisch ist.

(Zweite Orthogonalitätsrelation)

Zentralisatorung: $C_G(g)=\{x\in G: xg=gx\}$

8.7 Theorem: Seien $g,h\in G$. Dann gilt:

$$\sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g)\,\overline{\chi(h)} = \begin{cases} |C_G(g)|, & \text{falls } g \text{ und } h \text{ in } G \text{ konjugiert sind}\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

(Hier wird über Charaktere summiert, während in 8.3 über Gruppenelemente summiert wird.)

Beweis: Seien $g_1,g_2,\dots,g_k$ Repräsentanten der Konjugationsklassen von G. Wir werten die Charaktere daran aus, $\chi_i(g_j)$, und schreiben die Werte in eine Matrix $X=(\chi_i(g_j))_{(i,j)}$ – das ist eigentlich eine Tabelle, in deren Spalten die Charakterwerte der Konjugationsklassen stehen.

$\underbrace{|\mathcal{C}\ell_G(g)|}_{\text{Konjugationsklasse}}=[G:C_G(g)]=|G|/|C_G(g)|$ Details?

Die Grössen der Konjugationsklassen schreiben wir als Diagonaleinträge in eine Diagonalmatrix D.

Die erste Orthogonalitätsrelation 8.3(b) ist ein System von k^2 Gleichungen

$$|G|\,\delta_{ij}=\sum_{g\in G}\chi_i(g)\overline{\chi_j(g)} \underset{\text{warum?}}{=} \sum_{p=1}^{k}|\mathcal{C}\ell_G(g_p)|\,\chi_i(g_p)\,\overline{\chi_j(g_p)}$$

das man auch als Matrizengleichung schreiben kann:

$$|G|\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\ \vdots&&&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}=XD\overline{X}^{tr} \Rightarrow D\overline{X}^{tr} \text{ ist bis auf den Faktor } |G|$$

rechtsinvers zu X (quadratische Matrix

$\Rightarrow$ auch linksinvers $\Rightarrow$ $|G|\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\0&&1\end{pmatrix}=D\overline{X}^{tr}X$.

Das schreiben wir als Gleichungssystem: $|G|\,\delta_{ij}=\sum_{p=1}^{k}\underbrace{|\mathcal{C}\ell(g_i)|}_{=|G|/|C_G(g_i)|}\overline{\chi_p(g_i)}\,\chi_p(g_j)$

$\Rightarrow$ $|C_G(g_i)|\,\delta_{ij}=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(G)}\chi(g_j)\,\overline{\chi(g_i)}$ $\square$

Wenn man auf die Beweise zurückschaut, kann man sagen, daß die Orthogonalitätsrelationen letztlich auf Schurs Lemma beruhen, daß eine Art Orthogonalität zwischen den einfachen $\mathbb{C}G$-Moduln angibt. Das war auch Issai Schurs Zugang und deshalb findet man oft auch die Bezeichnung "Schurs Orthogonalitätsrelationen."

Jetzt können wir Beispiele berechnen. Das gewünschte Ergebnis ist eine Charaktertafel:

<u>8.8 Definition</u>: Sei G eine endliche Gruppe, $\chi_1, \ldots, \chi_k$ die irreduziblen Charaktere und $g_1, \ldots, g_k$ Repräsentanten der Konjugationsklassen. Die $k \times k$-Matrix mit (i,j)-Eintrag $\chi_i(g_j)$ heißt <u>Charaktertafel</u> von G.

Das ist die Matrix X aus dem Beweis von Theorem 8.7. Weil die irreduziblen Charaktere als Klassenfunktionen linear unabhängig sind, sind die Zeilen der Charaktertafel linear unabhängig, also ist sie eine invertierbare Matrix.

Beispiele:

- $C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle = \{1, a, a^2\}$. Bei abelschen Gruppen ist jede Konjugationsklasse einelementig. Die "Repräsentanten" sind also $1, a$ und a^2.
  Es gibt drei Charaktere ~~χ~~ χ_1, χ_2 und χ_3, die wir schon kennen. Als χ_1 nimmt man immer den trivialen Charakter: Die triviale Darstellung bildet (für jede Gruppe G) jedes Gruppenelement g auf die ~~1~~ 1×1-Matrix (1) abbildet. Die Charakterwerte sind dann alle 1.
  Für C_3 gibt es noch zwei weitere Charaktere, die durch $a \mapsto \omega$ bzw. $a \mapsto \omega^2$ festgelegt sind, mit $\omega = e^{2\pi i/3}$.
  $\rightsquigarrow$ Charaktertafel

	1	a	a^2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

nachprüfen

• Σ_3, die symmetrische Gruppe der Permutationen von drei Elementen – hier kennen wir das Ergebnis noch nicht. Die Berechnung der Gruppenalgebra und der Charaktertafel beginnt immer damit, daß man leicht zugängliche Informationen sammelt:

(a) $\dim \mathbb{C}\Sigma_3 = 6$, $\mathbb{C}\Sigma_3 = \oplus$ Matrizenringen $\Rightarrow$ 6 wird als Summe von Quadraten geschrieben

(b) Σ_3 ist nicht abelsch $\Rightarrow \mathbb{C}\Sigma_3$ ist nicht kommutativ

(c) Jede Gruppe hat eine ~~1x1~~ triviale Darstellung $\Rightarrow$ Mat$(1\times1, \mathbb{C})$ kommt als Summand der Gruppenalgebra vor.

(d) Σ_3 (allgemein Σ_n) hat eine weitere 1-dimensionale Darstellung, die wir aus der linearen Algebra kennen: die Vorzeichendarstellung, $g \mapsto (-1)^{\mathrm{sgn}(g)}$, wobei sgn(g) die Fehlstände zählt. Diese Darstellung ist nicht ähnlich zur trivialen Darstellung.

(e) Die Elemente der symmetrischen Gruppe Σ_n sind Produkte von disjunkten Zykeln. Zwei Elemente sind zueinander konjugiert $\Leftrightarrow$ dieselbe Zykeldarstellung.

$\Rightarrow$ die Konjugationsklassen der Σ_3 sind:

$$\{1_{\Sigma_3}\}$$
$$\{(12), (13), (23)\}$$
$$\{(123), (132)\}$$

Aus (a) und (b) folgt: $\mathbb{C}\Sigma_3 = (\mathbb{C})_{1\times1} \oplus (\mathbb{C})_{2\times2} \oplus (\mathbb{C})_{1\times1}$, denn es können nicht nur 1x1-Matrizen sein.

Aus (e) folgt: Die Charaktertafel ist eine 3x3-Matrix.

(c) und (d) liefern zwei Zeilen der Charaktertafel.

	(1)	(12)	(123)
χ_{triv}	1	1	1
χ_{sgn}	1	−1	1
χ_{st}	2	0	−1

Wir rechnen gleich nach, wie man fehlende Einträge durch Orthogonalitätsrelationen bestimmt.

(Die erste Spalte liefert die Zerlegung der Gruppenalgebra oder folgt aus dieser.)

Angenommen, wir haben die folgende Information:

	(1)	(12)	(123)
χ_{triv}	1	1	1
χ_{sgn}	1	a	b
χ_{st}	2	c	d

Elementezahl der Konjugationsklassen:
(1) – 1
(12) – 3
(123) – 2

Gesucht sind a, b, c, d.

Die Darstellung hinter χ_{sgn} ist 1-dimensional, also sind a und b Einheitswurzeln.
(c und d sind Summen von zwei Einheitswurzeln, wegen 8.4.

(12) hat Ordnung 2, (123) hat Ordnung 3 $\Rightarrow$ a ist 1 oder −1, b ist 1 oder $e^{2\pi i/3}$ oder $e^{4\pi i/3}$. Für c und d gibt es mehr Möglichkeiten, die wir nicht aufschreiben. Es ist eine bessere Idee, jetzt die Orthogonalitätsrelationen aufzustellen: Für α, β irreduzibel, $\alpha \neq \beta$, gilt $[\alpha, \beta] = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g)\overline{\beta(g)} = 0$. $\frac{1}{|G|}$ kann man weglassen, und statt über $g \in G$ zu summieren, summieren wir über Repräsentanten der Konjugationsklassen, jeweils mit der Größe der Klasse als Vielfachheit.

$\rightsquigarrow$ [1. Zeile, 2. Zeile] = 0 $\Rightarrow$ $1 + 3a + 2b = 0$

$1+3a$ ist eine rationale Zahl $\Rightarrow$ b auch, also $b \neq e^{2\pi i/3}, \neq e^{4\pi i/3}$

$\Rightarrow b = 1$ ist bestimmt $\Rightarrow a = -1$

Für die dritte Zeile können wir wieder die erste Orthogonalitätsrelation nutzen, also Orthogonalität mit der ersten und mit der zweiten Zeile.
Wir können aber auch die zweite Orthogonalitätsrelation als Spaltenorthogonalität einsetzen: z.B. $g = (1), h = (123)$

$\Rightarrow \chi_{triv}(g)\overline{\chi_{triv}(h)} + \chi_{sgn}(g)\cdot\overline{\chi_{sgn}(h)} + \underbrace{\chi_{st}(g)}_{2}\,\underbrace{\overline{\chi_{st}(h)}}_{d} = 0$

$\Rightarrow 1 + 1 + 2d = 0 \Rightarrow d = -1$

Für $g = (1), h = (12)$: $1.1 - 1\cdot 1 + 2c = 0 \Rightarrow c = 0$

Hier sieht man, daß die zweite Orthogonalitätsrelation wirklich sehr praktisch ist.

Für größere und kompliziertere Gruppen braucht man natürlich weitere Methoden, um die Charaktertafel zu bestimmen. Im Computeralgebra-Paket GAP (frei erhältlich) sind solche Methoden implementiert und es gibt auch eine Character Table Library mit vielen berechneten Beispielen.

Wie sieht die Darstellung der Σ_3 aus, die den Charakter χ_{st} hat? Nach Definition permutiert die S_3 drei Elemente, zum Beispiel die Koordinaten x, y, z in $\mathbb{C}^3$ bzw die Basiselemente e_1, e_2, e_3.

$\rightsquigarrow$ Darstellung $\rho: \Sigma_3 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C})$

$$(12) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (123) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

ρ hat Charakter χ: $(1) \longmapsto 3$, $(12) \longmapsto 1$, $(123) \longmapsto 0$

Nach 7.20 und 7.21 können wir ρ zerlegen, indem wir χ zerlegen als $\chi = r \cdot \chi_{triv} + s \cdot \chi_{sgn} + t\,\chi_{st}$. Die Koeffizienten r, s und t sind eindeutig bestimmt und dann ist $\rho = \underbrace{\rho_{triv} \oplus \ldots \oplus \rho_{triv}}_{r\text{ mal}} \oplus \underbrace{\rho_{sgn} \oplus \ldots \oplus \rho_{sgn}}_{s\text{ mal}} \oplus \underbrace{\rho_{st} \oplus \ldots \oplus \rho_{st}}_{t\text{ mal}}$

Rechnen oder raten: $\rho = \rho_{triv} \oplus \rho_{st}$.

Daraus folgt: $\rho_{st} \simeq \rho / \rho_{triv}$ (d.h. Quotientenmodul).

D.h. wir suchen eine Teildarstellung von ρ, die isomorph zur trivialen Darstellung ist. Der Vektor $e_1 + e_2 + e_3$ erzeugt einen 1-dimensionalen Modul, der unter Permutation der Koordinaten fest bleibt. Das ist, bis auf Isomorphie, die triviale Darstellung. Und $\mathbb{C}^3 / [e_1 + e_2 + e_3]$ muß der einfache Modul sein, dessen Charakter χ_{st} ist. (st für "standard").

Wenn wir ρ nicht erraten hätten, hätten wir es auch gefunden (sogar zwei Kopien davon), durch Zerlegung der regulären Darstellung, in der ja jeder einfache Modul vorkommt.