Sei G eine endliche Gruppe, KG die Gruppenalgebra und M ein endlich-dimensionaler KG-Modul. Die Moduloperation $KG \times M \to M$ definiert einen Algebrenhomomorphismus

$$KG \to \mathrm{End}_K(M)$$
$$a \mapsto (\varphi_a : m \mapsto am) \quad K\text{-linear}$$
$$a \cdot b \mapsto \varphi_{ab} : m \mapsto (ab)m = \underbrace{a(bm)}$$
$$= \varphi_a(\varphi_b(m))$$
$$= (\varphi_a \circ \varphi_b)(m)$$

Sei $n = \dim M$ die Vektorraumdimension von M.

Damit ist $\mathrm{End}_K(M) \cong \mathrm{Mat}(n \times n, K)$

Umgekehrt definiert ein Algebrenhomomorphismus

$$KG \to \mathrm{Mat}(n \times n, K) \cong \mathrm{End}_K(K^n)$$
$$a \mapsto \varphi_a$$

eine Modulstruktur auf K^n: $a \cdot m := \varphi_a(m)$

warum?

$$(ab) \cdot m = \varphi_{ab}(m) = (\varphi_a \circ \varphi_b)(m) = \varphi_a(\varphi_b(m)) = a(bm)$$

Eine Linksmodulstruktur entspricht also genau einer Darstellung im Sinne der folgenden Definition:

<u>7.11 Definition:</u> Sei A eine K-Algebra. Eine <u>n-dimensionale Darstellung</u> von A (oder: eine Darstellung <u>vom Grad n</u>) ist ein K-Algebren-Homomorphismus $A \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

Zwei Darstellungen $\varphi: A \to \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und $\psi: A \to \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ heißen <u>ähnlich</u> (oder: <u>äquivalent</u>) $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$ so daß $\forall a \in A$:

$$\varphi(a) = P \psi(a) P^{-1}$$

(Der Basiswechsel P muß also simultan für alle $a \in A$ durchgeführt werden.)

Jeder Modul definiert eine Darstellung.

Jede Darstellung definiert einen Modul.

Isomorphe ~~Dar~~ Moduln definieren äquivalente Darstellungen.

Äquivalente Darstellungen definieren isomorphe Moduln.

Wenn $A = KG$ eine Gruppenalgebra ist, kann man eine Darstellung $\varphi: KG \to \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ einschränken zu einer Abbildung $\varphi: G \to \mathrm{Mat}(n \times n, K)$. Was passiert hier?

$\varphi: KG \to Mat(n \times n, K)$ ist ein Algebrenhomomorphismus $\Rightarrow$ additiv und multiplikativ und $1_{KG} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Für $g \in G$ ist $gg^{-1} = 1_{KG}$ $(= 1_G)$ $\Rightarrow$
φ bildet G in $GL_n(K)$ ab
und $\varphi: G \to GL_n(K)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

7.12 Definition: Eine n-dimensionale Darstellung einer Gruppe G (oder eine Darstellung vom Grad n) ist ein Gruppenhomomorphismus $\varphi: G \to GL_n(K)$, für $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper.
(Um K zu betonen, kann man K-Darstellung oder Darstellung über K sagen.
Der Satz von Maschke legt nahe, daß es auf K ankommt.
Eine Darstellung der Gruppe wandelt also die abstrakten Gruppenelemente $g \in G$ in konkrete Gruppenelemente von $GL_n(K)$ um, mit denen man z.B. rechnen kann)
Eine Darstellung der Gruppenalgebra liefert eine Darstellung der Gruppe.
Umgekehrt definiert eine Darstellung der Gruppe G in $GL_n(K)$ eine Darstellung von KG in $Mat(n \times n, K)$.

Daß z.B. $\mathbb{C}G$-Moduln, $\mathbb{C}G$-Darstellungen und Darstellungen von G über $\mathbb{C}$ alles dasselbe ist, erlaubt uns, die Perspektive zu wechseln. Ist das wirklich ein Gewinn?
Unser Ausgangsproblem war, $\mathbb{C}G$ in eine Summe von einfachen Moduln zu zerlegen.
Oder die Algebra $\mathbb{C}G$ in eine Summe von Matrizenringen über $\mathbb{C}$.
Für jedes G wissen wir schon, daß es eine eindimensionale Darstellung (die "triviale" Darstellung) gibt: $\begin{array}{l} G \to GL_1(\mathbb{C}). \\ g \mapsto (1) \end{array}$ Es kann aber andere, nicht äquivalente eindimensionale Darstellungen geben. Und andere von größerer Dimension. Da jeder einfache Modul als Summand von $\mathbb{C}G$ vorkommt, sind aber jedenfalls die Dimensionen $\leq |G|$ und die Anzahl der Isomorphie-Klassen auch. Und die Dimensionen der Matrizenringe müssen sich zu $|G|$ aufaddieren.

Die "Charaktere", die wir jetzt gleich definieren werden, sollen helfen, solche Daten und Gleichungen zu gewinnen, auf möglichst einfache Weise. Also keine Normalformen von Matrizen, sondern einfachere Daten, die sich als sehr nützlich herausstellen werden.

7.13 Definition: Sei ρ eine (endlich-dimensionale) Darstellung einer Gruppe über K. Die Funktion $\chi = \chi_\rho : G \to K,\ g \mapsto \underset{\text{Spur (trace)}}{tr}(\rho(g))$ heißt Charakter der Darstellung ρ.

χ hängt nicht von der Wahl einer Basis ab.

Der Wert $\chi(1)$ heißt der Grad von χ. Warum? $\rho: 1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \Rightarrow \chi: 1 \mapsto n$

Falls $char(K) = 0$, gibt $\chi(1)$ also den Grad von ρ an.

Aber für $char(K) = p$, kann $\chi(1) = 0$ sein, obwohl n groß ist.

Die triviale Darstellung, $g \mapsto (1)\ \forall g$, hat als Charakter die konstante Funktion 1.

Charaktere vom Grad 1 heißen lineare Charaktere. Jeder Gruppenhomomorphismus $G \xrightarrow{\lambda} K^* = K - \{0\}$ (multiplikative Gruppe) definiert eine Darstellung $\rho: g \mapsto (\lambda(g))_{1\times 1}$ mit Charakter λ.

Im Allgemeinen sind Charaktere keine Homomorphismen in irgendeinem Sinn. Wir werden aber sehen, daß sie andere, sehr interessante Eigenschaften haben.

Beispiel: Sei $n \geq 2$, $G = C_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $G = \{g^a : 0 \leq a \leq n-1\}$ zyklisch, erzeugt von g.

$\rho_\omega : g \longmapsto (\omega)$ mit $\omega = e^{2\pi i/n}$ ist eine Darstellung mit Charakter

$g^a \longmapsto (\omega^a)$ $\qquad\qquad \chi_{\rho_\omega} : g^a \mapsto \omega^a = tr(\omega^a)$

$\rho_{\omega^j} : g \longmapsto (\omega^j)$ für $1 \leq j \leq n$ ist immer eine Darstellung mit ~~Chrk~~ Charakter

$g^a \longmapsto (\omega^{ja})$ $\qquad\qquad \chi_{\rho_{\omega^j}} : g^a \mapsto \omega^{ja}$

($\omega^n = 1$, ρ_{ω^n} ist die triviale Darstellung)

1×1-Matrizen sind nur zu sich selbst ähnlich $\Rightarrow \rho_{\omega^j} \neq \rho_{\omega^l}$ für $j \not\equiv l \bmod n$

Das sind n paarweise nicht isomorphe Darstellungen. Alle sind einfach weil 1-dim.

$n = ord(G) \Rightarrow \mathbb{C}G \cong (\mathbb{C})_{1\times 1} \oplus \dots \oplus (\mathbb{C})_{1\times 1}$.

Schon an den Charakteren ~~sieht~~ sieht man, daß die Darstellungen verschieden sind.

Jetzt bestimmen wir Eigenschaften von Charakteren. Wir setzen ab jetzt $K=\mathbb{C}$.

7.14 Lemma: Seien ρ_1 und ρ_2 Darstellungen von G, M_1 und M_2 die zugehörigen Moduln. Dann gilt: (a) $M_1 \simeq M_2 \Rightarrow \chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

(b) Zu $M_1 \oplus M_2$ gehört die Darstellung $g \longmapsto \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$ mit Charakter $\chi_1 + \chi_2$.

(c) Jeder Charakter χ erfüllt $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)\ \forall h, g \in G$. χ ist also konstant auf den Konjugationsklassen von G.

Beweis: (a) nach Definition

(b) nach Definition

(c) nach Definition $\square$

7.14 (c) sagt, daß Charaktere Klassenfunktionen sind:

7.15 Definition: Eine Funktion $\varphi: G \to \mathbb{C}$ heißt Klassenfunktion, wenn sie auf Konjugationsklassen konstant ist, d.h. φ weist zueinander konjugierten Elementen denselben Wert zu.

G ist eine endliche Gruppe, hat also endlich viele Konjugationsklassen $K_1, \ldots, K_\ell$.
Die Menge der Klassenfunktionen ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis

$b_1, \ldots, b_\ell$, $b_i: \begin{cases} K_i \ni g \longmapsto 1 \\ K_j \ni h \longmapsto 0, j \neq i \end{cases}$ (charakteristische Funktion einer Konjugationsklasse)

Die Dimension ist also gleich ℓ (Anzahl der Konjugationsklassen).

Wir werden zeigen: Die Charaktere der einfachen $\mathbb{C}G$-Moduln (bis auf Isomorphie wegen 7.14(a)) bilden auch eine Basis. Es gibt also ℓ solche Charaktere (die irreduzible Charaktere genannt werden) und ℓ Isomorphie-Klassen einfacher Moduln (deren Dimensionen durch Auswertung ihrer Charaktere an 1 ~~bestim~~ bestimmt sind).

Um $\mathbb{C}G$ vollständig zu bestimmen (durch die Charaktere von G) müssen wir auch noch herausfinden, mit welcher Multiplizität jeder einfache Modul in der Zerlegung von $\mathbb{C}G$ vorkommt.

Erinnern wir uns an die Bestimmung halbeinfacher Algebren: Sei A eine halbeinfache Algebra. Also $_A A = S_1^{n_1} \oplus S_2^{n_2} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell}$, $S_1, \ldots, S_\ell$ paarweise nicht isomorphe einfache A-Moduln (genauer: Repräsentanten der Isomorphie-Klassen einfacher A-Moduln). Wegen $K = \mathbb{C}$ ist $\mathrm{End}(S_i)^{op} \simeq \mathbb{C}$ für $i = 1, \ldots, \ell$.
Daraus haben wir die Zerlegung von A als Algebra gewonnen:

$$A \simeq \mathrm{Mat}(n_1 \times n_1, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(n_2 \times n_2, \mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}(n_\ell \times n_\ell, \mathbb{C}).$$

Wie folgt umgekehrt die Modulzerlegung aus der Algebrazerlegung?
Wir betrachten einen Summanden $\mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{C})$ der Algebra A.
$\mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{C})$ hat $\mathbb{C}^m$ (Spaltenvektoren) als Linksmodul. Als Linksmodul ist

$$\mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{C}) = \underset{\text{1. Spalte}}{\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \oplus \underset{\text{2. Spalte}}{\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \oplus \ldots \oplus \underset{m\text{-te Spalte}}{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathbb{C} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{C} \end{pmatrix}},\ m \text{ Summanden.}$$

Alle Summanden sind isomorph zu $\mathbb{C}^m$.

$\Rightarrow \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^m \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^m$ als Linksmodul. Als Algebra ist es also isomorph zu den $m \times m$-Matrizen über dem Endomorphismenring von $\mathbb{C}^m$.
Wegen $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{C}) = m^2$ muß dieser Endomorphismenring (der $\mathbb{C}$-id enthält, also ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist) gleich $\mathbb{C}$ sein. Daraus folgt (vergleiche 5.12):
$\mathbb{C}^m$ ist unzerlegbar, wegen $\mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{C})$ halbeinfach also: $\mathbb{C}^m$ ist einfach.
Das kann man auch direkt nachrechnen: Sei $U \subset \mathbb{C}^m$ ein Teilmodul $\neq 0$, $x \in U \setminus \{0\}$.
x Spaltenvektor mit Einträgen $\neq 0 \Rightarrow \mathrm{Mat}(m \times m, \mathbb{C}) \cdot x$ ist ganz $\mathbb{C}^m$, das folglich $= U$ und einfach ist.

Für A wie oben ergibt sich: die einfachen A-Moduln sind, bis auf Isomorphie, die Spalten der Matrizenringe $\mathrm{Mat}(m_j \times m_j, \mathbb{C})$. Die Dimension der einfachen A-Moduls $\mathbb{C}^{m_j}$ ist gleich der Multiplizität m_j von $\mathbb{C}^{m_j}$ in der Modulzerlegung von $_A A$. (Warum kann das falsch sein, wenn K nicht algebraisch abgeschlossen ist.) Die Dimension der einfachen Moduls ist (wenn $A = \mathbb{C}G$ eine Gruppenalgebra ist) durch den Wert der Charakters 1 bestimmt. Es genügt also zu zeigen, daß die Charaktere der einfachen Moduln eine Basis der Klassenfunktionen bilden.

Aus der Zerlegung einer halbeinfachen Algebra A können wir noch weitere nützliche Information ablesen: Für eine beliebige Algebra ist das Zentrum definiert als $Z(A) = \{a \in A : ab = ba \ \forall b \in A\}$.

Für $A = \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ ist $Z(A) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$. (Diese Matrizen kommutieren mit allen anderen. Multiplikation mit Matrizen E_{pq} – Eintrag 1 an der Stelle (p,q) 0 sonst – zeigt, daß sonst nichts im Zentrum liegt.)

Für $A = \mathrm{Mat}(n_1 \times n_1, \mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}(n_\ell \times n_\ell, \mathbb{C})$ ist das Zentrum als $\mathbb{C}$-Vektorraum erzeugt von $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ den Einselementen der verschiedenen Komponenten (= Summanden).

$\Rightarrow$ Die $\mathbb{C}$-Dimension des Zentrums ist ℓ, die Anzahl der Komponenten.

Wir halten fest, was wir jetzt gelernt haben:

7.16 Proposition: Sei $A = \mathbb{C}G = \mathrm{Mat}(n_1 \times n_1, \mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Mat}(n_\ell \times n_\ell, \mathbb{C})$.

(a) Bis auf Isomorphie hat A genau ℓ einfache Moduln $S_1, \ldots, S_\ell$.
$\dim S_j = n_j$ und ${}_A A = S_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus S_\ell^{n_\ell}$ $|G| = \sum_{j=1}^{\ell} n_j^2$.

(b) Seien $\chi_1, \ldots, \chi_\ell$ die Charaktere der zu $S_1, \ldots, S_\ell$ gehörenden Darstellungen von G. Dann ist $|G| = \sum_{j=1}^{\ell} \chi_j(1)^2$.

(c) $\dim Z(\mathbb{C}G) = \ell$.

(Achtung: Wir wissen noch nicht, ob die Charaktere $\chi_1, \ldots, \chi_\ell$ paarweise verschieden sind. Ihre Grade $\chi_1(1), \ldots, \chi_\ell(1)$ müssen jedenfalls nicht verschieden sein, wie wir bei den zyklischen Gruppen gesehen haben.)

Das Zentrum und seine Dimension ℓ haben wir jetzt in der halbeinfachen Algebra $A = \mathbb{C}G$ betrachtet. Wir können es aber auch rein gruppentheoretisch betrachten: Seien $K_1, \ldots, K_m$ die Konjugationsklassen in G. (Wir haben sie vorher schon optimistisch mit $K_1, \ldots, K_\ell$ bezeichnet – aber $\ell = m$ müssen wir noch zeigen.)

Zu einer Konjugationsklasse K_j sei $S(K_j) := \sum_{g \in K_j} g$ die Summe der Elemente in dieser Konjugationsklasse, also z.B. $S(K_1) = 1_{\mathbb{C}G}$, wenn wir passend numerieren.

7.17 Proposition: Die Elemente $S(K_1), -, S(K_m)$ liegen in $Z(\mathbb{C}G)$ und bilden eine $\mathbb{C}$-Basis. Das Produkt zweier solcher Basiselemente ist eine Linearkombination von ~~Bas~~ Basiselementen mit Koeffizienten in $\mathbb{N}_0$.

Beweis: Sei $a = \sum_{g\in G} \lambda_g g \in Z(\mathbb{C}G)$, $h \in G \Rightarrow ha = ah$, das bedeutet auch:

$$a = hah^{-1} = \sum \lambda_g (hgh^{-1}).$$

Koeffizientenvergleich $\Rightarrow \lambda_g = \lambda_{hgh^{-1}}$ $\forall h$ $\Rightarrow$ alle Elemente einer ~~Koeffizient~~ Konjugationsklasse haben denselben Koeffizienten
$\Rightarrow$ a ist eine Linearkombination der $S(K_j)$.
Umgekehrt ist für jedes $h \in G$: $S(K_j) = hS(K_j)h^{-1} \Rightarrow h$ kommutiert mit $S(K_j) \Rightarrow S(K_j) \in Z(\mathbb{C}G)$.
Und natürlich sind die $S(K_j)$ linear unabhängig, bilden folglich eine Basis von $Z(\mathbb{C}G)$. $\Rightarrow l = m$.
Jetzt noch die Aussage über die Koeffizienten im Produkt $S(K_i) \cdot S(K_j)$:
Das ist eine Linearkombination von $S(K_h)$'s, also halten wir einen Index h fest und ein Gruppenelement $g \in K_h$. Da alle den gleichen Koeffizienten haben, genügt es den Koeffizienten von g zu bestimmen.
In $S(K_i)$ und in $S(K_j)$ sind alle Koeffizienten 1. Der Koeffizient von g im Produkt zählt also einfach, wie oft sich g als $g_1 g_2$ ergibt mit $g_1 \in K_i$ und $g_2 \in K_j$. Das ist 0 oder eine natürliche Zahl. $\square$

7.18 Korollar: (a) Die Anzahl der Konjugationsklassen der Gruppe G ist gleich der Dimension des Zentrums von $\mathbb{C}G$ und gleich der Anzahl der Isomorphie Klassen einfacher $\mathbb{C}G$-Moduln und gleich der Anzahl irreduzibler Darstellungen von G über $\mathbb{C}$. d.h. der Darstellungen zu einfachen Moduln
(b) Die Gruppe G ist abelsch $\Leftrightarrow$ jeder irreduzible Charakter ist linear (d.h. vom Grad 1) $\Leftrightarrow$ in der Algebrazerlegung von $\mathbb{C}G$ kommen nur 1×1-Matrizenringe vor $\Leftrightarrow$ ~~=~~ in der Modulzerlegung von $\mathbb{C}G$ kommt jede Isomorphie Klasse von einfachen Moduln genau einmal vor.

Beweis: (a) Die erste Gleichheit folgt aus 7.17. Und die anderen?
(b) G ist abelsch $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}G$ kommutativ. Daraus folgen alle Äquivalenzen. $\square$

Wir haben aber immernoch nicht gezeigt, daß die irreduziblen Charaktere alle verschieden sind und die einfachen Moduln bis auf Isomorphie durch ihre Charaktere bestimmt sind.

Dafür schauen wir nochmal die Algebra-Zerlegung von $\mathbb{C}G$ an:

$\mathbb{C}G = \mathrm{Mat}(n_1 \times n_1, \mathbb{C}) \oplus \dots \oplus \mathrm{Mat}(n_\ell \times n_\ell, \mathbb{C})$. Daraus folgt eine Zerlegung

$$1_G = \underset{\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n_1 \times n_1}}{\overset{\shortparallel}{e_1}} + \underset{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n_2 \times n_2}}{\overset{\shortparallel}{e_2}} + \dots + \underset{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n_\ell \times n_\ell}}{\overset{\shortparallel}{e_\ell}}$$

$e_1, e_2, \dots, e_\ell$ sind Idempotente in $\mathbb{C}G$, sogar in $Z(\mathbb{C}G)$, das sie zerlegen:
$Z(\mathbb{C}G) = \mathbb{C}\cdot e_1 \oplus \mathbb{C}\cdot e_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}e_\ell$. Auch $\mathbb{C}G = \mathbb{C}G\cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}Ge_\ell$ nochprüfen

Die Darstellung ρ_i von $\mathbb{C}G$ auf S_i (= Spalte in $\mathbb{C}Ge_i$) gehört zum Algebrenhomomorphismus $\mathbb{C}G \xrightarrow[p_i]{} \mathrm{Mat}(n_i \times n_i, \mathbb{C})$. p_i ist die Projektion auf diese Komponente,
also einfach die Multiplikation mit e_i (wegen $e_i \in Z(\mathbb{C}G)$ ist diese Multiplikation ein Algebrenhomomorphismus).

Die Darstellung ρ_i bildet 1_G auf $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}$ ab und $\rho_i(1_G) = \rho_i(e_i)$, während $\rho_i(e_j) = 0$ für $i \neq j$.

Daraus folgt für die Charaktere, d.h. die Spuren der Matrizen:

$$\left.\begin{aligned} \chi_i(1) &= \chi_i(e_i) = n_i \neq 0 \\ \chi_i(e_j) &= 0 \text{ für } i \neq j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi_i \neq \chi_j \text{ als Funktionen } \mathbb{C}G \to \mathbb{C}$$

$\hat{=}$ linear fortgesetzt von $\chi_i : G \to \mathbb{C}$

Da $\{g \in G\}$ eine Basis von $\mathbb{C}G$ bilden, muss $\chi_i \neq \chi_j$ ebenfalls gelten.

<u>7.19 Korollar:</u> Zwei einfache $\mathbb{C}G$-Moduln sind isomorph $\Leftrightarrow$ die zugehörigen Darstellungen ~~ä~~ sind ähnlich $\Leftrightarrow$ deren Charaktere sind gleich.
Die Anzahl der irreduziblen Charaktere stimmt überein mit der Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Moduln.

Wenn wir mit $Irr(G)$ die Menge der irreduziblen Charakter von G bezeichnen, also der Charaktere der irreduziblen Darstellungen, dann ist $|Irr(G)|$ die Anzahl der Konjugationsklassen von Elementen in G.
Und es gilt: $|G| = \sum_{\chi \in Irr(G)} \chi(1)^2$.

Jetzt können wir auch das Problem bei den Klassenfunktionen lösen:
7.20 Theorem: Die irreduziblen Charaktere bilden eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums der Klassenfunktionen.
Eine Klassenfunktion $\varphi = \sum_{\chi \in Irr(G)} a_\chi \chi$ $(a_\chi \in \mathbb{C})$ ist der Charakter einer Darstellung von G genau dann, wenn $\varphi \neq 0$ und alle $a_\chi \in \mathbb{N}_0$.
(wir betrachten keine 0×0-Matrizen)

Beweis: Die erste Aussage folgt aus ?
Zum Modul $S_1^{a_1} \oplus \ldots \oplus S_e^{a_e}$ gehört der Charakter $a_1\chi_1 + \ldots + a_e\chi_e$. Andere endlich-dimensionale Moduln gibt es nicht.

Die Multiplizität a_j in $\overbrace{S_1^{a_1} \oplus \ldots \oplus S_j^{a_j} \oplus \ldots \oplus S_e^{a_e}}^{M}$ erhalten wir durch $\chi(e_i)$, wenn χ der (linear fortgesetzte) Charakter von M ist.
Daraus folgt:
7.21 Korollar: Zwei $\mathbb{C}G$-Moduln M_1 und M_2 sind isomorph genau dann, wenn ihre Charaktere χ_1 und χ_2 übereinstimmen.

Was uns jetzt noch fehlt, sind Methoden um Charaktere einer Gruppe konkret zu bestimmen.