§4. Wiederholung: Vektorräume, abelsche Gruppen, Hauptidealringe

Sei K ein Körper. In linearer Algebra wurden mehrere Klassifikationsprobleme gelöst:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist jeder n-dimensionale K-Vektorraum V isomorph zu K^n. Bis auf Isomorphie gibt es also genau einen solchen K-Vektorraum.
Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $\varphi: V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Dann kann man Basen von V und von W wählen, so daß die darstellende Matrix von φ Gauss-Normalform hat. Wie kann man das durch Zerlegungen von V in $X \oplus \mathrm{Kern}(\varphi)$ und von W in $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus Y$ ausdrücken? Und was hat $\mathrm{Im}(\varphi)$ mit V und $\mathrm{Kern}(\varphi)$ zu tun?
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi: V \to V$ K-linear, d.h. ein Endomorphismus von V. Dann kann man eine Basis von V wählen, so daß die darstellende Matrix von φ rationale Normalform hat, wenn $K = \mathbb{C}$ sogar Jordan-Normalform.

Körper und Vektorräume sind abelsche Gruppen. Andere Beispiele von abelschen Gruppen: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$. Das sind zyklische Gruppen, d.h. erzeugt von einem Element.
Zyklische Gruppen haben wir klassifiziert (Algebra 2.5):
Zwei zyklische Gruppen G_1 und G_2 sind isomorph $\Leftrightarrow |G_1| = |G_2|$, d.h. bis auf Isomorphie gibt es genau $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$.
Die Untergruppen zyklischer Gruppen sind auch zyklisch (Algebra 2.6) und sind bekannt: $\mathbb{Z} > m\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Und bei $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?
Bei abelschen Gruppen kann es nicht so einfach sein: $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ haben dieselbe Ordnung, sind aber nicht isomorph. warum nicht?
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ haben dieselbe Ordnung und sind isomorph.

Kann man die endlichen abelschen Gruppen klassifizieren?

Auf der vorigen Seite sind auch zwei Ringe vorgekommen:
$\mathbb{Z}$ ist ein Ring, in $\mathbb{Z}$ sind Ideale und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sind nicht nur abelsche Gruppen, sondern sogar Quotientenringe.
Und der Polynomring $K[x]$ enthält zum Beispiel das Minimalpolynom des Endomorphismus φ, das für die Bestimmung der Jordan-Normalform wichtig ist.

Die Ringe $\mathbb{Z}$ und $K[x]$ haben viel gemeinsam, zum Beispiel den euklidischen Algorithmus. Ab Kapitel 5 werden wir noch weitere Gemeinsamkeiten sehen und vor allem nutzen.
(Algebra, Kapitel 1) $\mathbb{Z}$ und $K[x]$ sind euklidische Ringe was heisst das?
$\Rightarrow$ Hauptidealringe: Jedes Ideal ist ein Hauptideal, d.h. von einem
warum Element erzeugt: $I = Ra$ für ein $a \in R$
$\Rightarrow$ faktoriell und noetherisch

was hat das mit unzerlegbaren und primen Elementen zu tun

was hat das mit aufsteigenden Ketten von Idealen und mit endlich erzeugten Idealen zu tun

Außerdem sind $\mathbb{Z}$ und $K[x]$ Beispiele von kommutativen Ringen und von Integritätsbereichen (nullteilerfrei).
warum?

Beispiele von kommutativen Ringen, die
kein Integritätsbereich
oder kein Hauptidealring sind?