Aufgaben zu halbeinfachen Algebren und Charakteren

(1) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist eine direkte Summe von einfachen $\mathbb{Z}$-Moduln genau dann, wenn n quadratfrei ist (d.h. in der Primfaktorzerlegung kommt jeder Primteiler nur einmal vor).
Zerlegen Sie $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ entsprechend.

(2) Sei G eine endliche Gruppe und K ein Körper mit Charakteristik 0.
Dann existiert außer dem trivialen eindimensionalen KG-Modul noch ein weiterer eindimensionaler KG-Modul $\Leftrightarrow$ $G \neq D(G)$
abgeleitete Gruppe, Definition 35

(3) (a) Hat jeder endlich erzeugte $K[x]$-Modul einen einfachen Teilmodul?
(b) Hat jeder endlich-dimensionale $K[x]$-Modul einen einfachen Teilmodul?

(4) Sei $G = C_3 = \langle g : g^3 = 1\rangle$ und $V = \mathbb{C}^2$ der $\mathbb{C}G$-Modul mit Basis v_1, v_2 und $g v_1 = v_2$, $g v_2 = -v_1 - v_2$
Zerlegen Sie (unabhängig voneinander)
- den $\mathbb{C}G$-Modul V in eine direkte Summe von einfachen ~~unzerlegbaren~~ Moduln ~~Darstellungen~~,
- die zugehörige Darstellung —"— irreduziblen Darstellungen,
- den zugehörigen Charakter —"— irreduziblen Charakteren.

(5) (a) Ist jeder Quotient einer halbeinfachen Algebra selbst halbeinfach?
(b) Ist jede Teilalgebra einer halbeinfachen Algebra selbst halbeinfach?
(c) Dieselben Fragen (a) und (b) für halbeinfache Moduln?

(6) (a) Sei $g \in G$ ein Gruppenelement mit $\operatorname{ord}(g) = m$. Sei $L := \mathbb{Q}(\zeta_m)$ mit $\zeta_m = e^{2\pi i/m}$. Sei $\operatorname{ggT}(k, m) = 1$.
Sei V eine $\mathbb{C}G$-Modul mit Charakter χ_V.
Dann ist $\chi_V(g^k)$ das Bild von $\chi_V(g)$ unter einem Element von $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$.

(b) Sei $G = \Sigma_n$. Dann sind g und g^k konjugiert.

(c) Alle Einträge in der Charaktertafel von S_n sind ganze Zahlen.

(7) Bestimmen Sie die Charaktertafel der Kleinschen Vierergruppe $V_4 = C_2 \times C_2$.