Aufgaben zu Moduln über Hauptidealringen

(1) (a) Ist $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/_{\mathbb{Z}(66,30)+\mathbb{Z}(12,4)} \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{48\mathbb{Z}}$?

(b) Ist $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/_{U} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ für $U = \mathbb{Z}(4,-2,3) + \mathbb{Z}(2,2,0) + \mathbb{Z}(6,12,-9)$?

(c) Ist $\mathbb{Z}/_{792\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{9\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}/_{11\mathbb{Z}}$?

(2) (a) Sei G die abelsche Gruppe $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Torsionsanteil $T(G)$ und entscheiden Sie, ob G eine direkte Summe von zyklischen Gruppen ist.

(b) Dieselben Fragen für $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

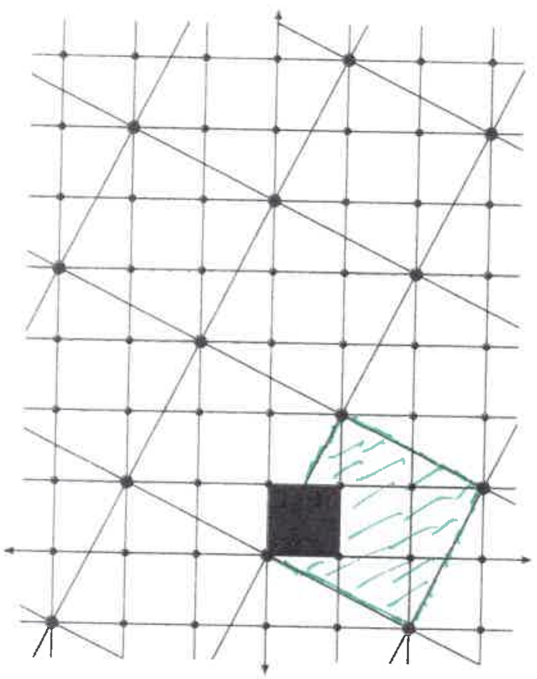
(c) Sei p eine Primzahl und $Z(p^\infty) := \{z \in \mathbb{C} : \exists n \text{ mit } z^{p^n} = 1\}$, die multiplikative Gruppe der p^n-ten Einheitswurzeln (für ~~ne~~ $0 \leq n < \infty$).
Ist $Z(p^\infty)$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathbb{Q}$ (additiv)?
Ist der p-Torsionsanteil von $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorph zu $Z(p^\infty)$?

(3) Für eine endlich erzeugte abelsche Gruppe G wurde in der Vorlesung gezeigt: $T(G) = \bigoplus_{p \text{ prim}} T_p(G)$. Zeigen Sie dies ohne die Voraussetzung "endlich erzeugt."
Bestimmen Sie diese Zerlegung für $G = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

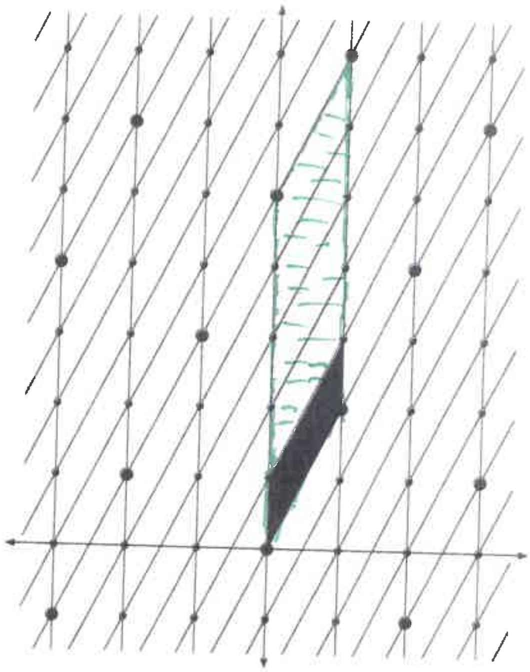
(4) Gibt es in $Z(p^\infty)$ eine unendlich lange aufsteigende Kette von Untergruppen?
Gibt es eine unendlich lange absteigende Kette von Untergruppen?

(5) Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal.
(a) Wenn $R/_I$ ein freier R-Modul ist, dann ist $I = 0$.
(b) Wenn jeder R-Modul frei ist, dann ist R ein Körper.

(6) Die beiden folgenden Bilder zeigen jeweils die abelsche Gruppe $G = \mathbb{Z}[i]$ und eine Untergruppe (dicke Punkte). Sind die beiden Untergruppen isomorph?
Wie sehen die Einbettungen in G aus? Und wie die Quotienten?



$U \subset G$



$V \subset G$

Welche Information steckt jeweils in dem schwarzen und dem grün schraffierten Parallelogramm? Was ist im rechten Bild besser?