Aufgaben zu Moduln

(1) Sei R ein Ring. Wir betrachten endlich erzeugte R-Linksmoduln. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to {}_R X \xrightarrow{f} {}_R Y \xrightarrow{g} {}_R Z \to 0$ <u>zerfällt</u> (oder: ist zerfallend) $:\Leftrightarrow$ $\exists$ R-Modulhomomorphismus $h: Z \to Y$

mit $g \circ h = id_Z$

(a) Zeigen Sie: die Sequenz zerfällt

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Homom $j: Y \to X$ mit $j \circ f = id_X$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Untermodul $U \subset Y$ mit $Y \underset{\text{gleich}}{=} U \oplus \operatorname{kern}(g)$

(b) Sei Z frei. Dann zerfällt jede in Z endende kurze exakte Folge.

(c) Wenn alle in Z endenden kurzen exakten Sequenzen zerfallen, dann ist Z frei.

(d) Wenn in einer kurzen exakten Sequenz die Endterme X und Z frei sind, dann ist auch der Mittelterm Y frei.
Gilt auch die Umkehrung?

(e) Sei $R = K$ ein Körper. Gibt es nicht zerfallende kurze exakte Folgen?

(2) Sei R ein Ring, X und Y R-Moduln, $f: X \to Y$ ein Modulhomomorphismus und $U \subset X$ ein Teilmodul mit $U \subset \operatorname{Kern} f$. Sei $\pi: X \to X/U$ die Restklassenabbildung; π ist ein Modulhomomorphismus.

- Dann gibt es einen eindeutigen Modulhomomorphismus $g: X/U \to Y$ sodaß $f = g \circ \pi$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & Y \\ & X/U \arrow[ur, "\exists! g"'] & \end{tikzcd}$$

($\circlearrowleft$ bedeutet: die zwei Arten von X nach Y zu kommen, stimmen überein)

- Falls $U = \operatorname{Kern}(f)$ gilt ist $\operatorname{Im}(f) \simeq X/U$.

(Zu zeigen sind die drei mit • markierten Aussagen.)

(3) $\mathbb{Q}$ ist ein $\mathbb{Z}$-Modul (nicht endlich erzeugt).

(a) $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

(b) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$

(4) Sei $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R}) =: \Lambda$.

Zeigen Sie: R ist ein Teilring von $\mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R}) = \Lambda$.

Λ ist linksnoethersch und rechtsnoethersch.

R ist linksnoethersch.

R ist nicht rechtsnoethersch.

(5) Sei $R = \prod_{n\in\mathbb{N}} K$ (K ein Körper), d.h. R ist die Menge der Folgen mit Einträgen in K.

R ist ein Ring mit eintragsweiser Addition und Multiplikation:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$I := \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{nur endlich viele } a_n \neq 0 \} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} K$

- I ist ein Ideal in R.
- $M := R/I$ ist ein Ring und ein R-Modul.
- Wie sehen Idempotente in R und in R/I aus?
- Bestimmen Sie $\mathrm{End}_R(R/I)$.
- Ist M super-zerlegbar (d.h. M ist zerlegbar und hat keinen unzerlegbaren direkten Summanden)?

(6) Erinnern Sie sich an den Ring $\underbrace{\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]}^{R:=}$ aus Algebra. R ist kein Hauptidealring. Zum Beispiel gilt:

$$9 = 3\cdot 3 = (2+\sqrt{-5})\cdot(2-\sqrt{-5})$$

und die Elemente ± 3, $2\pm\sqrt{-5}$ sind irreduzibel (=unzerlegbar).

Zeigen Sie: $I_1 := \langle 3, 2+\sqrt{-5}\rangle$ und $I_1 := \langle 3, 2-\sqrt{-5}\rangle$ sind keine Hauptideale.

$I_1 + I_2 = R$

Es gibt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to I_1 \cap I_2 \to I_1 \oplus I_2 \to R \to 0$$

Diese Sequenz zerfällt, also gilt

$$I_1 \oplus I_2 \simeq R \oplus I_1 \cap I_2$$

Alle Summanden sind unzerlegbar.

R ist nicht isomorph zu I_1 oder I_2.

Also hat $I_1 \oplus I_2$ zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen in direkte Summen von unzerlegbaren R-Moduln.