Aufgaben zu polynomialen Gleichungen

(1) (a) Sei G auflösbar, H eine Untergruppe, $H < G$, und N ein Normalteiler. Dann sind H und G/N auch auflösbar.

(b) Die Diedergruppen D_{2n} sind auflösbar.

(c) Die Quaternionengruppe (mit 8 Elementen) ist auflösbar.

(d) Die symmetrische Gruppe Σ_4 (die man sich als Symmetriegruppe eines Tetraeders vorstellen kann) hat Untergruppen mit 12 Elementen (A_4), mit 8 Elementen (Diedergruppe), mit 4 Elementen (zyklisch oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) ~~und sonst keine nicht-trivialen Untergruppen~~.

Σ_4 ist auflösbar.

(e) Polynome vom Grad (oder: ≤ 4) 4 sind auflösbar durch Radikale (in der Situation von 3.8, das verwendet werden darf).

(2) (a) Sei $L = K(a_1, ..., a_n)$ und $\alpha \in Aut_K(L)$ mit $\alpha(a_j) = a_j \ \forall j = 1, ..., n$. Dann ist $\alpha = Id_L$.

(b) Sei L der Zerfällungskörper des Polynoms $f(x)$ über K ($char(K) = 0$). Dann operiert $Gal(L/K)$ treu auf der Menge der Nullstellen von f.

(c) Sei nun $\deg f = 3$ und L der Zerfällungskörper von f über K. Dann ist $G := Gal(L/K)$ isomorph zu Σ_3 oder zu A_3.

(d) In (c) sei $G \cong \Sigma_3$, $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ über L. Dann sind a_1, a_2, a_3 verschieden und $K(a_1, a_2) \ni a_3$.

Welche Zwischenkörper entsprechen den Untergruppen $H < \Sigma_3$ mit $|H| = 2$?

Sei Z der Zwischenkörper, der $H = A_3 < \Sigma_3$ entspricht.

Dann ist $Z = K(\delta)$ eine quadratische Erweiterung von K und man kann $\delta = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$ wählen, und $D := \delta^2 \in K$.

(e) Sei $f(x) \in k[x]$ irreduzibel vom Grad 3 und L, σ und D wie in (d).
Dann ist D Quadrat eines Elements in $k \Leftrightarrow [L:k]=3$.

(f) Bestimmen Sie $[L:k]$ für

$$f_1(x) = x^3+3x+1 \text{ und für}$$

$$f_2(x) = x^3-3x+1.$$

(3) Ist $f(x) = x^{12}-3x^4-3$ auflösbar durch Radikale?

(4) Sei p eine Primzahl und $f(x) = x^5-p^2x-p \in \mathbb{Q}[x]$.
Ist f durch Radikale auflösbar?