Aufgaben zur Galois-Theorie

(1) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, $L|K$ endlich.

(a) Sei $L = K(a)$ einfach und M ein Zwischenkörper, d.h. $K \subset M \subset L$. Sei $m_a(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ das Minimalpolynom von a über M.
Zeigen Sie: $M = K(b_0, \ldots, b_{n-1})$

(b) Sei die Anzahl der Zwischenkörper M mit $K \subset M \subset L$ endlich.
Zeigen Sie (sowohl für K endlich als auch für K unendlich), daß $L|K$ einfach ist.

(c) Zeigen Sie: $L|K$ ist eine einfache Erweiterung
$\iff$ es gibt nur endlich viele Zwischenkörper

(d) Zeigen Sie: Galoiserweiterungen sind einfach.

(e) Zeigen Sie: Es gibt eine endliche Erweiterung N von L, die über K normal ist.

(f) Folgern Sie den Satz vom primitiven Element:
$L|K$ separabel $\Rightarrow$ $L|K$ einfach.

(2) Sei K ein Körper.

(a) Sei $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ eine Menge paarweise verschiedener Automorphismen von K. Dann gilt: $[\cancel{E}\, K : K^G] \geq n$

Fixpunkte unter allen σ_i

(b) Sei G eine (endliche) Untergruppe von $\mathrm{Aut}(K)$. Dann ist
$[K : K^G] = |G|$.

(c) Seien G und H endliche Untergruppen von $\mathrm{Aut}(K)$ mit $K^G = K^H$. Dann ist $G = H$.

((a) und (b) sind lineare Algebra-Aufgaben.)