Aufgaben zur Galois-Theorie

(1) Sei $\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ der $\mathbb{Q}$-Automorphismus mit $\varphi(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.
Ist φ stetig?

(2) Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung. Warum ist $\mathrm{Gal}(L|K)$ endlich? Geben Sie ein Argument an, der den Hauptsatz der Galoistheorie nicht verwendet.

(3) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung mit $[L:K] = 4$ und $L = K(\alpha, \beta)$, wobei α und β Nullstellen von quadratischen Polynomen in $K[x]$ sind. Sei char $(K) = 0$.
Zeigen Sie, daß $L|K$ eine Galoiserweiterung ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$.

(4) Sei p eine Primzahl, $f(x) = x^p - 2$ und L der Zerfällungskörper von $f(x)$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie daß $L|\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist mit Galoisgruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}_p, a \neq 0 \right\} \subset GL_2(\mathbb{F}_p)$$

(5) Sei $L|K$ eine Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Sei $a \in L$. Zeigen Sie:
$L = K(a) \Leftrightarrow \sigma_1(a), \ldots, \sigma_n(a)$ sind paarweise verschieden.