Aufgaben zu Kapitel 1, Teil 1

(1) Bestimmen Sie alle Körperautomorphismen von

- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$
- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$

(2) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

- $Gal(L/K)$ und damit die Zwischenkörper
- ~~B~~ die Zwischenkörper und damit $Gal(L/K)$
- die Abbildungen α und β

(3) wie (2), aber für $L =$ Zerfällungskörper von $x^3 - 2$

(4) Zeigen Sie, daß jede endliche Gruppe G als Galoisgruppe über irgendeinem Körper vorkommt: Sei $|G| = n$.

(a) Sei K ein Körper, $R = K[t_1, \ldots, t_n]$ der Polynomring in n Variablen und $\hat{K} = Quot(R)$ der Körper der Brüche. Dann ist die symmetrische Gruppe Σ_n (Permutationen von n Elementen) eine Untergruppe von $Aut(\hat{K})$.

(b) G ist eine Untergruppe von ~~te~~ $Aut(\hat{K})$.

(c) $\hat{K}$ ist eine Galoiserweiterung eines Körpers L mit $Gal(\hat{K}/L) = G$.

(Ob das auch über vorgegebenem Grundkörper, z.B. $\mathbb{Q}$, geht ist ein offenes Problem, das Umkehrproblem der Galoistheorie.)