Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 11.07.2018
Aufgabenblatt 13

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Sei V ein reeller Vektorraum und $s : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit $s(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.
   (i) Die Menge $U := \{v \in V \mid s(v,v) = 0\}$ ist ein Unterraum von V;
   (ii) Die Zuordnung $\bar{s}([v],[w]) := s(v,w)$ definiert ein Skalarprodukt auf V/U.
2. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesche Matrizen. Sind dann auch die Matrizen AB, A^{-1} (falls die inverse Matrix existiert), $A + B$ und $\lambda \cdot A$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ hermitesch? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
3. Bestimmen Sie die darstellende Matrix des Standardskalarproduktes auf dem $\mathbb{C}^3$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ mit den Vektoren
$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$
   Welche Eigenwerte hat diese Matrix?
4. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass
$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2.$$
   Was bedeutet diese Gleichheit geometrisch? Skizzieren Sie ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$.
5. Sei V ein unitärer Vektorraum und seien $v, w \in V$. Zeigen Sie, dass
$$< v, w >= \frac{1}{4}(||v + w||^2 - ||v - w||^2 + i||v + iw||^2 - i||v - iw||^2).$$
6. Sei V ein unitärer Vektorraum und sei U ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass $U \subset (U^\perp)^\perp$. Gilt im Allgemeinen auch $U = (U^\perp)^\perp$ oder $U^\perp = ((U^\perp)^\perp)^\perp$?
7. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^3$, indem Sie das Verfahren von Gram-Schmidt auf die folgenden Vektoren in $\mathbb{C}^3$ anwenden:
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$
8. Gegeben ist der reelle Vektorraum $V = [\{1, x, x^2, x^3\}] \subset \mathbb{R}[x]$.
   (i) Zeigen Sie, dass für $f, g \in V$ die Zuordnung $< f, g >:= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ ein Skalarprodukt definiert.
   (ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von V.

Dieses Übungsblatt enthält nur Votieraufgaben, die in der Übungsgruppe am 18.07.2018 besprochen werden. Alle acht Aufgaben können in der Übung votiert werden. Dadurch können Sie noch bis zu vier Bonuspunkte sammeln. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18