Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2018
Mittwoch, 04.07.2018
Aufgabenblatt 12

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Wenn A und B affine Räume über $\mathbb{K}$ bezüglich der Vektorräume V und W sind, dann ist $A \times B$ auch ein affiner Raum über $\mathbb{K}$ bezüglich $V \times W$.
   (ii) Wenn A ein affiner Raum über $\mathbb{C}$ ist und $p, q \in A$, dann sind p und q parallele affine Unterräume von A.
   (iii) Jede Ebene über $\mathbb{F}_3$ hat genau 6 Punkte.
   (iv) Wenn $\mathcal{U}_A$ die Menge aller affinen Unterräume eines affinen Raumes A ist, dann bildet die Relation $A_1 \| A_2$ für $A_1, A_2 \in \mathcal{U}_A$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{U}_A$.

2. Sei A die Menge $\{\sum_{j=0}^{3} a_j x^j \in \mathbb{C}[x] \mid \sum_{j=0}^{2} (j+1) a_{j+1} x^j = 1 - i\}$.
   (i) $(*)$ Zeigen Sie, dass A ein affiner Raum über $\mathbb{C}$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von A.
   (ii) $(*)$ Betrachten Sie A als affinen Raum über $\mathbb{C}$ wie in Teil (i). Zeigen Sie, dass $x - ix, x - ix + i \in A$, und bestimmen Sie $B_{\mathbb{C}} = [\{x - ix, x - ix + i\}]$ sowie die Dimension von $B_{\mathbb{C}}$.
   (iii) $(*)$ Zeigen Sie, dass A auch ein affiner Raum über $\mathbb{R}$ ist, und bestimmen Sie die Dimension von A über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie zudem $B_{\mathbb{R}} = [\{x - ix, x - ix + i\}]$ sowie die Dimension von $B_{\mathbb{R}}$ über $\mathbb{R}$.

3. $(*)$ Seien $A \neq \emptyset$ eine Menge und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Nehmen Sie an, dass es eine Abbildung $\Phi : A \times A \longrightarrow V$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:
   (E1) $\Phi(p, q) + \Phi(q, r) = \Phi(p, r)$ für alle $p, q, r \in A$;
   (E2) für jedes $p \in A$ ist die Abbildung $\Phi_p : A \longrightarrow V$ gegeben durch $\Phi_p(q) = \Phi(p, q)$ eine Bijektion.
   Zeigen Sie, dass A ein affiner Raum über $\mathbb{K}$ bezüglich V ist.

4. Sei A ein affiner Raum über $\mathbb{K}$ bezüglich V. Seien $p, q, r_1, \ldots, r_n$ beliebige Punkte von A und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
   (i) Wenn $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$, dann gilt die Gleichung $p + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{pr_j} = q + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{qr_j}$.
   (ii) Wenn $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0$, dann gilt die Gleichung $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{pr_j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \overrightarrow{qr_j}$.

5. $(*)$ Sei $A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{t}} \in \mathbb{Q}^4 \mid (x_2, 2x_2 + 3x_3, x_2 + x_3, -3x_2 + x_3)^{\mathrm{t}} = (1, 2, 1, -3)^{\mathrm{t}}\}$ ein affiner Raum über $\mathbb{Q}$. Seien A_1 und A_2 affine Unterräume von A. Unter welchen Voraussetzungen gilt $[A_1 \cup A_2] = A$? Geben Sie konkrete Beispiele für einander schneidende beziehungsweise zueinander parallele Geraden $A_1, A_2 \subseteq A$ an, sodass $\dim([A_1 \cup A_2])$ maximal wird.

6. Auf $\mathbb{R}^2$ sind die Bilinearformen $f_A : (x,y) \mapsto x^{\mathrm{t}}Ay$ und $f_B : (x,y) \mapsto x^{\mathrm{t}}By$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
gegeben. Bestimmen und skizzieren Sie die Mengen $M_A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_A(x,x) = 0\}$ und $M_B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_B(x,x) = 0\}$.

7. Die folgenden Matrizen seien darstellende Matrizen symmetrischer Bilinearformen auf $\mathbb{R}^3$. Welche dieser Bilinearformen sind Skalarprodukte?
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem $(*)$ gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 11.07.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18