Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2017/18
Mittwoch, 27.06.2018
Aufgabenblatt 11

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) Es gibt $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ und $p, q \in \mathbb{K}[x]$, sodass $BC \neq CB$, wobei $B = p(A)$ und $C = q(B)$.
   (ii) $(*)$ Es gibt 3 Ähnlichkeitsklassen von Abbildungen $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $f \circ f = f$.
   (iii) Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(13 \times 13, \mathbb{C})$ mit Eigenwerten in $\mathbb{Z}$ gilt die Aussage: Wenn $\mathrm{Rang}(A - 2E_{13}) = 11$, dann ist $\det(A) \in \mathbb{Z}$ und $8 | \det(A)$ oder es gilt $\dim(\cup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Kern}((A - 2E_{13})^k)) = 2$.
   (iv) Wenn die Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Q})$ ähnlich sind, dann stimmen ihre rationalen Normalformen überein.
   (v) Die Menge $\{(x, y, z)^{\mathrm{t}} \in (\mathbb{F}_3)^3 \mid (x + y^2 - 2, x + y, x + 2z) = (1 - y^3 - 2y^2, 0, 2 - z^3)\}$ ist ein affiner Raum über $\mathbb{F}_3$.
   (vi) $(*)$ Es gibt eine endliche Menge, die ein affiner Raum über $\mathbb{R}$ bezüglich eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V \neq 0$ ist.
   (vii) $(*)$ Wenn A und B affine Räume über $\mathbb{K}$ bezüglich eines Vektorraumes V sind, dann ist $A \times B$ auch ein affiner Raum über $\mathbb{K}$ bezüglich V für die Funktion $(a, b) + v := (a + v, b + v)$ wobei $a \in A$, $b \in B$ und $v \in V$.

2. Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad $n(A)$. Wir definieren die Matrix $e^A := \sum_{k=0}^{n(A)-1} \frac{1}{k!} A^k \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.
   (i) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ nilpotente Matrizen mit $A \cdot B = B \cdot A$. Zeigen Sie, dass $A + B$ nilpotent ist und $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.
   (ii) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ eine nilpotente Matrix. Zeigen Sie, dass e^A eine invertierbare Matrix ist mit $(e^A)^{-1} = e^{-A}$. Berechnen Sie die Eigenwerte von e^A und die Determinante von e^A.
   (iii) Vergleichen Sie die Jordan-Normalformen von A und von e^A?

3. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^6)$ mit $m_f = x^6$. Sei $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ eine Basis $\mathcal{B}_1$ von $\mathbb{C}^6$, sodass die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}_1$ in Jordan-Normalform ist. Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ Basen $\mathcal{B}_n$ von $\mathbb{C}^6$ an, sodass die darstellende Matrix von f^n bezüglich $\mathcal{B}_n$ in Jordan-Normalform ist.

4. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform sowie die rationale Normalform der folgenden Matrizen:

$$\text{(i) } (*)\ A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii) } (*)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ und v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert 1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $L_n = \{x \in V \mid f^n(x) = v\}$.

(i) Zeigen Sie, dass L_1 ein affiner Raum über $\mathbb{K}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass L_n ein affiner Unterraum von L_{n+1} ist für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Sei nun $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ die Abbildung gegeben durch $f((x, y, z)^{\mathrm{t}}) = (x+z, z, 0)^{\mathrm{t}}$ und $v = (1, 0, 0)^{\mathrm{t}}$. Bestimmen Sie L_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und skizzieren Sie die Mengen L_n in einem 3-dimensionalen Koordinatensystem.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem (∗) gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 04.07.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18