Steffen König
Teresa Conde
Frederik Marks

Sommersemester 2017/18
Mittwoch, 13.06.2018
Aufgabenblatt 9

Aufgaben zur Vorlesung:
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

1. Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten.
   (i) $(*)$ Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Q})$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann ist A nilpotent genau dann, wenn alle Diagonaleinträge von A null sind.
   (ii) $(*)$ Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ nilpotente Matrizen mit $A \cdot B = B \cdot A$. Dann ist auch $A + B$ nilpotent.
   (iii) Wenn der einzige reelle Eigenwert einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{R})$ null ist, dann ist A nilpotent.
   (iv) Sei $A \in \mathrm{Mat}(5 \times 5, \mathbb{R})$ mit Minimalpolynom $m_A(x) = (x+1) \cdot (x-2)^3$. Dann gilt $2 \cdot \mathrm{Spur}(A) = \det(A)$.
   (v) Seien $p \in \mathbb{C}[x]$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, sodass $p(\lambda) \neq 0$. Dann gilt für alle $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4)$, dass $\mathrm{Kern}(f - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}^4}) \subset \mathrm{Im}(p(f))$.
   (vi) Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ und sei $\{0\} \neq U \subset \mathbb{R}^2$ ein f-invarianter Unterraum. Dann existiert ein f-invarianter Unterraum $W \subsetneq \mathbb{R}^2$, sodass $U + W = \mathbb{R}^2$.
   (vii) Sei $U \subset \mathbb{C}^3$ ein komplexer Unterraum. Dann existiert ein Unterraum $W \subset (\mathbb{C}^3)^*$, sodass U und W dual zueinander sind.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$.
   (i) Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A^2)$ für den Fall, dass $9 \leq n \leq 11$ und $\mathrm{Rang}(A^3) = 3$, $\mathrm{Rang}(A^4) = 1$ und $\mathrm{Rang}(A^5) = 0$.
   (ii) Bestimmen Sie die Jordan-Normalform von A für den Fall, dass $n = 7$ und $\mathrm{Rang}(A) = 4, \mathrm{Rang}(A^2) = 1$ und $\mathrm{Rang}(A^3) = 0$.

3. Sei $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ der nilpotente Endomorphismus, der bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^5$ gegeben ist durch die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (i) $(*)$ Bestimmen Sie einen unzerlegbaren f-invarianten Unterraum $U \subset V$ von maximaler Größe sowie einen zu U dualen Unterraum $W \subset (\mathbb{R}^5)^*$, sodass
$$\mathbb{R}^5 = U \oplus \iota^{-1}(W^\circ).$$
   (ii) $(*)$ Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^5$, sodass die darstellende Matrix von f bezüglich $\mathcal{B}$ in Jordan-Normalform ist.

4. $(*)$ Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Bestimmen Sie bis auf Ähnlichkeit alle Matrizen in $\mathrm{Mat}(4 \times 4, \mathbb{K})$, deren Minimalpolynom gleich x^2 bzw. x^3 ist. Wie viele solche Matrizen gibt es, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p?

5. Bestimmen Sie alle diagonalisierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{F}_2)$ sowie alle diagonalisierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$, deren Einträge nur aus Nullen und Einsen bestehen.

Die schriftlichen Aufgaben sind mit einem (∗) gekennzeichnet und jede der 5 Teilaufgaben zählt 2 Punkte. Die Abgabe erfolgt in der Übungsgruppe am 20.06.2018. Für weitere Informationen besuchen Sie bitte die Homepage der Vorlesung:

www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/LAAG-Koenig-SS18